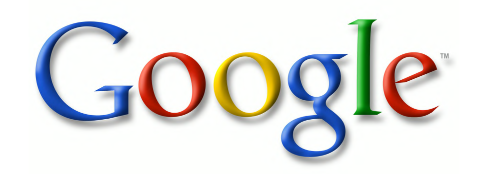


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

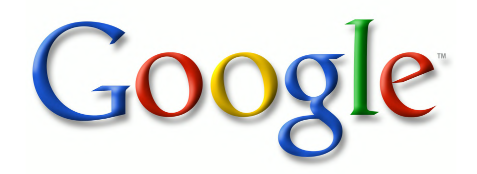
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


B 447666



The Gift of

WILLIAM H. BUTTS, Ph.D.

A.B. 1878 A.M. 1879

Teacher of Mathematics

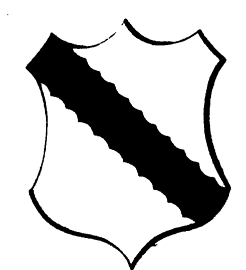
1898 to 1922

Assistant Dean, College of Engineering

1908 to 1922

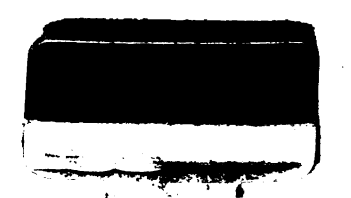
Professor Emeritus

1922



Radcliffe Observatory

OXFORD.



QA
300
.S345
1851

Handbuch

der

algebraischen Analysis

von

Dr. Oskar Schlömilch,

Professor der höheren Mathematik und höheren Mechanik an der Königl. Sächs. polytechnischen Schule zu Dresden.


RADCLIFFE
OBSERVATORY
OXFORD.

Zweite völlig umgearbeitete Auflage.

Mit einer Figurentafel.

Jena,

Druck und Verlag von Fr. Frommann.

1851.

Ken. Lib.
Gift
Professor William H. Butts
10-14-1935
add. ed.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Obschon der Grundgedanke und die Ideen, welche mich bei der ersten Ausarbeitung meiner algebraischen Analysis leiteten, dieselben geblieben sind, so kann ich diese neue Auflage doch als ein fast neues Werk bezeichnen. Nur die Anordnung des Materiales ist, im Wesentlichen unverändert, beibehalten, die Ausführung des Einzelnen dagegen hat sehr bedeutende Umgestaltungen erfahren, da es mir in den meisten Partieen glückte, theils strengere, theils kürzere oder elegantere Darstellungen zu finden. Diesen allgemeinen Bemerkungen erlaube ich mir noch eine detaillirtere Exposition folgen zu lassen, die zur richtigeren Beurtheilung meiner Arbeit vielleicht nicht überflüssig sein dürfte.

Die ersten sieben Capitel enthalten die allgemeinen Theorieen, mittelst deren die nachherige Aufgabe einer speziellen Theorie der fünf einfachen Funktionen (Potenz, Exponenzialgröfse, Logarithmus, trigonometrische und cyklometrische Funktionen) gelöst wird. Schon frühzeitig erscheinen hier (in §. 8., dessen Inhalt wohl überhaupt neu sein dürfte) die natürliche Exponenzialgröfse und der natürliche Logarithmus als Gränzwerthe der Potenz, und zwar bedarf es zu dieser Entwickelung nur sehr geringer Mittel, nämlich der Summenformel für die geometrische Progression. An diese Lehre von den Gränzwerthen der Funktionen schliefsen sich die Betrachtungen über die Continuität und Discontinuität, sowie über die Quadratur der Funktionen. Diefs letztere ist freilich ein Stück Integralrechnung, ich fürchte aber nicht, dafs man mir einen Vorwurf über die Aufnahme dieses Capitels machen werde. Schon in der Stereometrie läfst sich der Gebrauch solcher Betrachtungen nicht umgehen, noch häufiger machen sie sich bei der elementaren Behandlung der Mechanik nöthig, es ist daher nichts natürlicher, als dafs man das nun einmal Unvermeidliche mit einer hinreichenden Vollständigkeit und in möglichst syste-

matischer Form bearbeitet und zu einem Algorithmus erhebt. Pädagogisch hat die Sache gar keine Schwierigkeiten, und ich kann aus der Erfahrung mit einer stark besetzten Classe versichern, dafs die Schüler gerade für diese unmittelbar in die Praxis eingreifenden Betrachtungen eine besondere Vorliebe bekamen und den Algorithmus mit Leichtigkeit handhabten. Auch ist es späterhin beim Vortrage der Integralrechnung sehr angenehm, diese Vorstudien gehabt zu haben, deren geometrische Durchsichtigkeit die beste Illustration für die Abstraktionen der Integralrechnung liefert. — Wesentliche Zusätze hat die Lehre von den unendlichen Reihen erhalten namentlich in den §§. 32, 33., 35 und 36.

Die fünf folgenden Capitel beschäftigen sich ausschliefslich mit der Verwandlung der einfachen Funktionen in Potenzenreihen und bilden somit ein abgeschlossenes Ganzes. Hier ist der Algorithmus der Quadratur der Funktionen von grofser Brauchbarkeit; er führt mit Kürze und Eleganz zu den trigonometrischen und cyklometrischen Reihen (§§. 45, 48 und 49). Die Vergleichung zwischen den Exponenzial- und trigonometrischen Reihen leitet am Schlusse dieses Capitels (§. 50.) von selbst auf die imaginären Zahlen, und ich habe mich bemüht, die Bedeutung derselben rein mathematisch und ohne philosophische Tiefe zur Klarheit zu bringen. Naturgemäfs schliefst sich hieran die Untersuchung über die Funktionen complexer Variabelen; hoffentlich wird man darin (Capitel XIII, XIV und XV) das Streben nach möglichster Schärfe der Begriffe nicht verkennen.

Nach diesen Erörterungen tritt die Combination zwischen den Reihen und den complexen Zahlen ein, und es erhalten dadurch die früheren Reihenformeln ihre Erweiterung auf complexe Variabele (Cap. XVI). Bei dieser Gelegenheit finden sich auch die endlichen Produkte für die goniometrischen Funktionen; die Möglichkeit, diese Produkte ins Unendliche fortzusetzen, weist auf das Bedürfnifs hin, unendliche Produkte zu untersuchen, was in Cap. XVII geschieht, worauf in Cap. XVIII alle diejenigen Beziehungen erörtert werden, welche aus den unendlichen Produkten des vorigen Capitels entspringen, sobald man dieselben wieder in Reihen umsetzt.

Die beiden letzten Capitel sind den Kettenbrüchen gewidmet und unterscheiden sich von ihrer ersten Bearbeitung hauptsächlich durch die Untersuchungen des §. 80., welche manches Ungenügende der ersten Auflage verbessert ersetzen.

Was nun die algebraische Analysis im Ganzen, so wie ich sie hier gebe, rücksichtlich ihrer Stellung zur Wissenschaft überhaupt betrifft, so bin ich bescheiden genug, ihr keinen besonders hohen wissenschaftlichen

Werth zuzuschreiben, wohl aber einen didaktischen und, *sit venia verbo,* einen ästhetischen. Streng wissenschaftlich betrachtet, kann oder mufs man auf die Elementarmathematik unmittelbar die Differenzialrechnung folgen lassen; man braucht nicht einmal den binomischen Satz für ganze positive Exponenten, da die Differenziationen der Potenz, des Logarithmus und der Exponenzialgröfse mittelst der Summenformel für die geometrische Progression ausführbar sind (§. 8.). Ist man aber auf diesem Wege bis zu dem Theoreme von Mac Laurin gelangt, so entsteht die grofse Unbequemlichkeit einer wahren Aufthürmung von Digressionen und Excursen aller Art (Convergenz der Reihen, Theorie der complexen Funktionen u. s. w.), bei denen der Anfänger die Übersicht über die Differenzialrechnung fast verliert; es ist daher pädagogisch jedenfalls angemessen, diese von der Differenzialrechnung unabhängig darstellbaren Partieen als eine Einleitung in die höhere Analysis vorauszuschicken. Neben dieser didaktischen Berechtigung der algebraischen Analysis habe ich die ästhetische genannt, in so fern es nicht unangenehm ist, ein bestimmt abgegränztes Gebiet der Wissenschaft mit Sorgfalt zu bearbeiten und ihm, unbekümmert um die draufsen liegende Unendlichkeit, eine gewisse Abrundung zu verleihen.

Schliefslich bleibt mir die angenehme Pflicht, denjenigen Gelehrten, welche mich mit gehaltreichen Bemerkungen über die erste Auflage dieses Werkes erfreuten, meinen Dank abzustatten; es sind die Herren Drobisch, Möbius, Arndt, Wittstein, Malmstén und Björling, durch deren Güte verschiedene nicht unwichtige Verbesserungen möglich waren.

Dresden, am Pfingstfeste 1851.

Schlömilch.

Inhalt.

Einleitung.

Jede Arithmetik, welchen Namen sie auch führen möge, beschäftigt sich lediglich mit **Zahlen**, und es ist jede Rechnung nichts Anderes als ein nach einer vorgeschriebenen Weise ausgeführter Übergang von einer Stelle der Zahlenreihe zur andern, wobei es gleichgültig bleibt, ob man sich die Zahlen als spezielle denken will, wie bei den bürgerlichen Rechnungen, oder als allgemeine und willkührliche, wie sie in der Buchstabenrechnung vorkommen. So hat es denn auch die algebraische Analysis oder allgemeine Arithmetik, wie man sie öfters nennt, nur mit Zahlen zu thun — in welcher Weise aber diefs geschieht und welche Stellung die algebraische Analysis der Buchstabenrechnung gegenüber einnimmt, das läfst sich nur erkennen, wenn man vorher über die Leistungen der niederen Arithmetik vollständig orientirt ist. Wir geben daher zunächst einen Überblick über den Gedankengang und die Resultate des ebengenannten Theiles der Mathematik.

Nichts ist einfacher als die Entstehung der Zahl. Wer eine Vielheit von Dingen irgend welcher Art vor sich sieht, hat zunächst nur den unbestimmten Begriff einer gewissen Menge, Bestimmtheit aber erhält dieser Begriff erst dann, wenn jener ungeordnete Haufe aufgeräumt wird und die einzelnen Dinge in eine Reihe gestellt sind. Es erhält nämlich bei dieser Anordnung jeder Gegenstand seinen bestimmten Platz, und die Vorstellung dieser Stelle, welche das entsprechende Ding in der angenommenen Reihenfolge einnimmt, ist eben die Zahl. So entsteht zunächst die natürliche Zahlenreihe (1, 2, 3 etc.), und diese bildet vor der Hand das einzige Material der Arithmetik.

Als Grundlage für jedwedes Rechnen dient der Übergang von einer Zahl zu ihrer Nachbarin, eine Operation, welche man passend mit einem Schritte vergleichen kann. Geht man nun von einer Zahl a aus um so

viel Schritte weiter, als eine andere Zahl b anzeigt, so hat man die Addition in ihrer einfachsten Gestalt, die Zahl c, zu welcher man bei diesem Fortgange gelangt, ist die Summe von a und b, nämlich $c = a + b$. Sieht man umgekehrt die Summe c als gegeben an und ebenso einen der Summanden, etwa a, so entsteht die Aufgabe der Subtraktion, die Umkehrung der Addition. Hier ist zweierlei zu bemerken, erstens nämlich, dafs es nur eine solche Umkehrung giebt, weil $a + b = b + a$ ist, und es mithin gleichgültig bleibt, ob man b aus c und a, oder a aus c und b bestimmen will. Der zweite bemerkenswerthe Umstand ist, dafs es Fälle geben kann, in welchen die Subtraktion unausführbar wird; da nämlich die Zahlenreihe, im Sinne des Fortschrittes genommen, unbegränzt ist, so stöfst die Addition niemals auf eine Schwierigkeit, bei dem Rückschritte dagegen kann es sich treffen, dafs man aus der in dieser Richtung durch die Eins begränzten Zahlenreihe herausgeräth, wie z. B. bei $4 - 4$ oder $5 - 7$, und es sind daher solche Differenzen vor der Hand als unmögliche Zahlen zu betrachten, weil es eben unmöglich ist, in der bisherigen Reihe eine Zahl zu finden, welche aus einer derartigen Subtraktion entstanden wäre.

Durch Wiederholung der Addition, d. h. durch Addition mehrerer gleicher Summanden, gelangt man zur nächsten Rechnungsart, der Multiplikation, und es bedeutet hier ab zunächst weiter nichts als die Summe von a Summanden, deren jeder $= b$ ist. Setzt man $ab = c$ und sieht jetzt das Produkt c und einen der Faktoren, etwa a, als bekannt an, so entsteht die Aufgabe, den anderen Faktor b zu bestimmen, und diese Umkehrung der Multiplikation ist die Division. Hier wiederholen sich dieselben zwei Bemerkungen, die wir vorhin bei der Subtraktion machten; weil nämlich die Anordnung der Faktoren keinen Einflufs auf das Produkt ausübt, so ist es in Beziehung auf die Art der Rechnung gleichgültig, ob man b oder a sucht, und es giebt daher nur eine Umkehrung der Multiplikation. Ferner kann es sich treffen, dafs die Division unmöglich wird, was der Multiplikation nie begegnet, und es tritt diese Unmöglichkeit hier jedesmal ein, wenn der Dividend kein Vielfaches des Divisors ist. Ausdrücke wie $\frac{3}{4}$ oder $\frac{11}{2}$ sind daher vor der Hand als unmögliche Zahlen zu bezeichnen.

Aus der wiederholten Multiplikation entsteht nun weiter die Potenzirung, und zwar bedeutet hier a^b ganz einfach das Produkt von b Faktoren, deren jeder $= a$ ist. Verglichen mit der Addition und Multiplikation zeigt die Potenzirung die Eigenthümlichkeit, dafs hier keine Vertauschung der Zahlen a und b vorgenommen werden darf, wenn die Potenz ungeän-

dert bleiben soll, mit anderen Worten, es ist im Allgemeinen a^b nicht $= b^a$. Aus eben diesem Grunde hat die Operation des Potenzirens **zwei** Umkehrungen, indem man die Fälle unterscheiden mufs, ob in der Gleichung $a^b = c$ aus b und c die Grundzahl a, oder aus a und c der Exponent b bestimmt werden soll; das erste giebt die **Wurzelausziehung** ($\sqrt[b]{c}$), das zweite die **Aufsuchung des Logarithmus** ($log\, c$ für a als Basis, oder kürzer $^a log\, c$). Wiederum findet hier die Bemerkung statt, dafs die Operation des Potenzirens jederzeit ausführbar ist, während die umgekehrten Operationen auf Unmöglichkeiten stofsen können, wie z. B. bei $\sqrt[3]{7}$ oder $^4 log\, 10$.

So wie nun bisher aus den einzelnen Schritten die Addition, aus dieser die Multiplikation und hieraus die Potenzirung gebildet wurde, so könnte man es auch versuchen, durch wiederholte Potenzirung eine neue Rechnungsart zu schaffen; bemerkt man aber, dafs die Potenz einer Potenz wiederum eine Potenz ist, so erkennt man auf der Stelle, wie mit einer solchen Wiederholung jener Operation nichts Neues gewonnen wird. Es schliefst sich also hiermit die Reihe der Rechnungsoperationen, welche demnach drei ursprüngliche (direkte) und vier abgeleitete (indirekte) Operationen enthält. Gleichwohl ist aber die Arithmetik selbst defswegen nicht als abgeschlossen zu betrachten, denn wenn auch ein Zuwachs an neuen Operationen nicht mehr zu erwarten ist, so kann doch die Aufgabe gestellt werden, die vorhandenen Operationen unter allen Umständen ausführbar zu machen, und es entspringt diese Aufgabe naturgemäfs aus der Bemerkung, dafs die indirekten Operationen in vielen Fällen unmöglich wurden. Diese Unmöglichkeit liegt aber nicht in dem Begriffe jener Operationen (denn die Forderung z. B., von 4 aus um 7 Schritte rückwärts zu gehen, enthält keinen Widerspruch in sich), sondern einzig und allein in dem Mangel an Zahlen, an der Einseitigkeit und Lückenhaftigkeit der Zahlenreihe. Jene Unmöglichkeit verschwindet daher, sobald man das Zahlengebiet passend erweitert und auf welche Weise diese Erweiterung vorzunehmen sei, das müssen die indirekten Operationen selbst zu erkennen geben.

So führt uns die Subtraktion zunächst auf den Begriff der Null und der negativen Zahlen; wodurch sich die bisher einseitig unbegränzte Zahlenreihe zu einer nach beiden Seiten hin unbegränzten erweitert (positive und negative **ganze** Zahlen). Um ferner die Division ausführbar zu machen, bedarf es der Aufstellung solcher Zahlen, die in gleichen Abständen von einander zwischen je zwei Zahlen der bisherigen Reihe enthalten sind; so erscheinen die **Brüche** (positive und negative) als eingeschaltete Zwi-

schenglieder jener Zahlenreihe. Das Wurzelausziehen nöthigt zu einer weiteren Interpolation der Zahlenreihe, welche sich aber von der vorhergehenden in so fern unterscheidet, als man eine zwischen zwei ganzen Zahlen liegende Irrationalzahl durch eine Theilung des Intervalles in gleiche Theile nicht erreichen kann. Die Erscheinung der Irrationalzahlen berechtigt nun, sich an jeder beliebigen Stelle der Zahlenreihe eine Zahl zu denken, d. h. mit anderen Worten, die ursprünglich lückenhafte Zahlenreihe wird zur lückenlosen, die punktirte Zahlenlinie zu einer ununterbrochenen. Diefs ist das für den weiteren Fortgang der Arithmetik bedeutendste Resultat der Buchstabenrechnung, und es erreicht letztere ihr Ende, sobald sie diesen Nachweis geliefert und zugleich die Regeln angegeben hat, nach welchen mit beliebig aus der Zahlenlinie herausgegriffenen Zahlen die sieben Grundoperationen vorzunehmen sind. Was endlich die Bedeutung der imaginären Zahlen anbelangt, so wird der Verlauf dieses Werkes selbst darauf hinführen.

Capitel I.

Von den veränderlichen Gröfsen und den Funktionen im Allgemeinen.

§. 1.

Grundbegriffe und Aufgaben der algebraischen Analysis.

Der ununterbrochene Fortgang der Zahlenreihe, welchen die niedere Arithmetik am Ende ihrer Betrachtungen nachweist, gestattet eine ganz eigenthümliche Operation, deren Einfachheit nicht minder grofs ist als ihre Wichtigkeit. Das ursprünglichste Verfahren nämlich, um von einer Zahl a zu einer anderen b zu gelangen, bestand darin, dafs man von a aus in einzelnen Schritten (a, $a+1$, $a+2$ etc.) weiter ging, bis man auf die Zahl b traf; jeder solcher Schritt bildete einen Sprung, in so fern anfangs zwischen den einzelnen ganzen Zahlen keine Zwischenstufen existirten. Die Brüche aber geben die Möglichkeit an die Hand, die Weite dieser Sprünge bis zu jedem beliebigen Grade der Kleinheit zu vermindern, und sie dienen hierbei als Zwischenstufen von gleicher Gröfse. Stellen wir dazu noch beliebige Irrationalzahlen, so lassen sich zwischen a und b willkührlich viele Zwischenstufen von ebenso willkührlichen verschiedenen Gröfsen einschalten, und es kann nun der Übergang von a nach b ohne alle Sprünge, d. h. mit Durchlaufung aller möglichen Zwischenstufen, erfol-

gen; ein solcher Übergang heifst ein stetiger oder continuirlicher, jeder andere ein unstetiger, sprungweiser oder discontinuirlicher. Wir können uns jetzt auch eine Zahl x denken, welche erst den Werth a besafs und nachher durch stetigen Übergang den Werth b erhielt, und es hat dieser Prozefs die gröfste Ähnlichkeit mit der stetigen geradlinigen Bewegung eines Punktes von einer Stelle des Raumes zur anderen. Diese Vorstellung einer stetig veränderlichen Zahl bildet die Grundlage alles höheren Calcüls und ihre Wichtigkeit wird sofort aus der Bemerkung erhellen, dafs eine Anwendung der Arithmetik auf die stetig veränderlichen Gröfsen des Raumes und der Zeit unmöglich sein würde, wenn nicht auch die Zahl als stetig veränderlich angesehen werden könnte.

Nach dieser Erörterung über das Wesen der stetig veränderlichen Zahl oder Gröfse bedarf es noch eines äufseren Unterscheidungszeichens für dieselbe, da es sich treffen kann, dafs in einer und derselben Rechnung veränderliche und unveränderliche Zahlen vorkommen, die zu verwechseln man sich hüten mufs. Für diesen Zweck ist es allgemein üblich geworden, die unveränderlichen oder constanten Gröfsen mit den ersten Buchstaben des Alphabetes $a, b, c \dots$ zu bezeichnen, für die veränderlichen oder variabelen Gröfsen dagegen die letzten Buchstaben, wie t, x, y, z, zu brauchen. In einem Ausdrucke wie $ax + b$ bezeichnet daher x nicht mehr eine unbekannte Gröfse, wie in der Algebra, sondern eine unbestimmte, welche bei stetiger Änderung alle möglichen Zahlenwerthe durchlaufen kann, wogegen a und b festbestimmte Zahlen bedeuten, welche sich nicht ändern, während x andere und andere Werthe erhält.

Diese Unterscheidung führt von selbst um einen bedeutenden Schritt weiter, wenn man die Bemerkung hinzubringt, dafs jede Rechnung, die etwas mehr als unbestimmte Beziehungen enthalten will, am Faden der Gleichungen fortlaufen mufs. Setzen wir nämlich einen beliebigen Ausdruck, worin constante Gröfsen mit einer Variabeln verbunden vorkommen, einer neuen Gröfse gleich, also etwa unser obiges

$$ax + b = y,$$

so ist die neue Gröfse y offenbar wieder eine veränderliche; denn wenn x andere und andere Werthe annimmt, so ändern sich auch die Werthe von y. Aber diese Veränderungen sind nicht willkührlich; eine Änderung des x zieht eine ganz bestimmte Änderung des y nach sich; z. B. für zwei bestimmte Zahlenwerthe von x, die wir mit x_1 und x_2 bezeichnen wollen, kommen auch ein paar bestimmte entsprechende Werthe von y, etwa y_1 und y_2 genannt, heraus, so dafs ist

$$ax_1 + b = y_1 \text{ und } ax_2 + b = y_2.$$

Nehmen wir nun an, dafs x_2 um eine bestimmte Gröfse δ gröfser sei als x_1, also $x_2 = x_1 + \delta$, so haben wir

$$y_2 = a(x_1 + \delta) + b = ax_1 + b + a\delta$$

$$\text{d. h.} \quad y_2 = y_1 + a\delta$$

wenn also x sich um δ ändert, so ändert sich y um $a\delta$, mithin hängt die Veränderung des y von der des x ab und zwar auf fest bestimmte Weise. — Noch auffallender tritt diefs an dem folgenden Beispiele hervor. Es sei u eine ganz beliebig veränderliche Gröfse und

$$u^2 + c = v$$

so ist offenbar auch v eine Variable, aber nicht so willkührlich als u. Denn wenn c eine positive Zahl bedeutet, so ist für alle möglichen positiven oder negativen u das Quadrat u^2, folglich auch $u^2 + c$, mithin jenes v positiv und es existirt kein Werth von u, für welchen $u^2 + c$ oder v negativ werden könnte. Trotz der gänzlichen Unbestimmtheit des u ist also doch durch die Natur der Gleichung die Veränderlichkeit von v eingeschränkt und ihr als Spielraum blos das Gebiet der positiven Zahlen angewiesen. Man mufs daher unabhängige und abhängige veränderliche Gröfsen unterscheiden; die ersteren sind solche, denen man willkührlich jeden beliebigen Werth beilegen darf, die letzteren diejenigen, deren Veränderungen durch die stetigen Veränderungen einer anderen unabhängig veränderlichen Gröfse nach irgend einem Gesetze bedingt sind. Dieses Gesetz selbst spricht sich in irgend einer analytischen Formel aus, welche die unabhängig veränderliche Gröfse enthält (wie oben das $ax + b$). Jeden solchen Ausdruck, in welchem eine unabhängig veränderliche Gröfse auftritt, nennt man eine Funktion dieser Veränderlichen. Demnach sind alle beliebigen Ausdrücke wie

$$ax,\ x^a,\ a^x,\ \sqrt{b^2 - x^2},\ \log x,\ \sin x \text{ etc.}$$

sämmtlich Funktionen von x, die sich nur dadurch unterscheiden, dafs in jeder die Art des Vorkommens der Hauptgröfse eine andere, oder wie man auch sagt, dafs jede anderer Natur ist. Zur Bezeichnung der Funktionen im Allgemeinen bedient man sich der Buchstaben F, f, φ, ψ oder ähnlicher, welchen man denjenigen Buchstaben, der die in der Funktion vorkommende Veränderliche bezeichnet, in Parenthesen eingeschlossen auf der rechten Seite beisetzt*). Symbole wie $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ bedeuten also nichts Anderes, als gewisse, nicht näher bestimmte Rechnungsausdrücke, in welchen eine unabhängig veränderliche Gröfse vor-

*) Bisweilen läfst man wohl der Kürze wegen die Parenthesen weg und setzt z. B. schlechthin fx statt $f(x)$. Eine solche Schreibweise ist aber defswegen nicht sehr zu empfehlen, weil man bei ihr das Operationszeichen f leicht mit einem Coefficienten verwechselt.

kommt, wobei durch die verschiedenen Buchstaben F, f, φ, ψ zugleich angezeigt wird, dafs in jeder der genannten vier Funktionen x auf verschiedene Weise vorkommt, oder dafs jede anderer Natur ist. Hiernach ist nun der Sinn einer Gleichung wie

$$y = f(x).$$

ganz einfach folgender: die Gröfse y läfst sich dadurch aus x ableiten, dafs man mit diesem irgend welche noch nicht näher bestimmte analytische Operationen vornimmt und hierdurch ist y an x so gebunden, dafs jedem bestimmten Werthe von x ein gleichfalls bestimmter Werth von y entspricht.

Es kann eine Funktion auch zwei oder mehrere unabhängig veränderliche Gröfsen zugleich enthalten. So ist z. B. der Ausdruck $ax + cz$, in welchem x und z zwei von einander unabhängige beliebige Gröfsen bezeichnen, eine Funktion von x und z zugleich, weil er sich ändert, wenn x oder z allein eine Änderung erleidet. Setzt man $ax + cz = y$, so bezeichnet man die Abhängigkeit des y von x und z zugleich durch die Gleichung

$$y = f(x, z) \quad \text{oder} \quad y = \varphi(x, z) \text{ etc.}$$

Ebenso würden nun entsprechend $f(x, z, t)$, $\varphi(x, z, u, v)$ etc. Funktionen von drei und mehr Veränderlichen andeuten.

Sehen wir uns nun zunächst im Gebiete der niederen Arithmetik nach Funktionen um, so finden wir als einfachste

$$a + x, \quad a - x, \quad bx, \quad \frac{c}{x}$$

welche dadurch entstehen, dafs man mit der Variabeln die vier einfachsten arithmetischen Operationen vornimmt. Hierauf folgt naturgemäfs die Potenz, welche zu zwei verschiedenen Funktionen Veranlassung giebt, jenachdem man die Basis oder den Exponenten als unabhängige Variabele ansieht. So erhalten wir die Funktionen

$$x^a \text{ und } a^x$$

von denen die erste in der Analysis den Namen Potenz ausschliefslich führt, während die zweite sehr passend Exponenzialgröfse heifst. Da die Constante a auch gebrochen oder negativ sein kann, so begreift die Potenz zugleich die Funktionen

$$\sqrt[m]{x^n} \text{ und } \frac{1}{x^n}$$

in sich. Als letzte Funktion von arithmetischer Abkunft stellt sich noch der Logarithmus dar, indem man die Basis als constant, die Zahl als veränderlich ansieht und demgemäfs mit

$$^{a}log\ x$$

zu bezeichnen pflegt.

Die Allgemeinheit, welche im Begriffe der Funktion liegt, erlaubt uns, noch ein paar Schritte weiter zu gehen und auch solche Funktionen in Betrachtung zu ziehen, die nicht ursprünglich arithmetischer Abstammung sind. Beachten wir also aufser dem Gehalte der Arithmetik noch den der Geometrie und Trigonometrie, so stellen die goniometrischen Verhältnisse wiederum Beispiele einer gegenseitigen Abhängigkeit von Gröfsen dar, in so fern zu jedem Bogen ein bestimmter Sinus, Cosinus etc. gehört. Denken wir uns den Bogen x jederzeit in Theilen des Halbmessers ausgedrückt*), so giebt es zu jeder abstrakten Zahl x einen Sinus, Cosinus etc. und man hat daher die goniometrischen Funktionen

$$sin\ x,\ cos\ x,\ tan\ x,\ cot\ x,\ sec\ x,\ csc\ x.$$

An diese reihen sich noch sechs andere, welche die Umkehrungen derselben sind. Sehen wir nämlich die Variable x nicht als Bogen an, wie vorhin, sondern bezeichnen wir damit einen gegebenen Sinus, so gehört zu demselben ein ganz bestimmter spitzer Bogen, welchen man mit

$$Arc\ (sin = x) \text{ oder kürzer mit } Arcsin\ x$$

bezeichnet; hiernach ist z. B. $Arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $Arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ u. s. f. Ebenso versteht man unter $Arccos\ x$ denjenigen spitzen Bogen, dessen Cosinus die Länge x hat u. s. w., Den goniometrischen Funktionen stehen also die folgenden sechs gegenüber

$$Arcsin\ x,\ Arccos\ x,\ Arctan\ x,\ Arccot\ x,\ Arcsec\ x,\ Arccsc\ x,$$

welche den Namen cyklometrische Funktionen führen.

Was nun die Aufgabe der algebraischen Analysis anbelangt, so ist dieselbe eine doppelte. Sie hat erstlich mit den Mitteln, welche die Algebra bietet, die allgemeinen Eigenschaften der Funktionen so weit als möglich zu erforschen und dann zweitens die Resultate dieser Untersuchung speziell auf die bisher genannten Funktionen anzuwenden. Die algebraische Analysis zerfällt demnach in zwei Haupttheile, deren erster als eine elementare Theorie der allgemeinen Eigenschaften der Funktionen und deren zweiter als spezielle Theorie der einfachen Funktionen bezeichnet werden könnte, wobei wir die bisher genannten Funktionen unter der Benennung „einfache Funktionen" zusammenfassen.

*) Wäre der Bogen ursprünglich in Graden gegeben, so dafs er etwa g^0 fafste, so würde die Proportion

$$180^0 : g^0 = \pi : x, \quad \text{also } x = \frac{g}{180}\pi$$

gelten und dadurch bestimmt sich eben jenes x, wovon oben die Rede ist.

Da man in den Handbüchern der Trigonometrie die Lehre von den cyklometrischen Funktionen gewöhnlich nicht mit abgehandelt findet, so schalten wir die Entwickelung der cyklometrischen Hauptformeln im nächsten Paragraphen ein.

§. 2.

Die cyklometrischen Formeln.

I. Bezeichnet u einen positiven Bogen im ersten Quadranten, so haben alle die Bögen

$$u,\ \pi - u,\ 2\pi + u,\ 3\pi - u,\ 4\pi + u,\ 5\pi - u,\ \ldots$$

welche der Reihe nach im 1sten, 2ten, 5ten, 6ten, 9ten, 10ten, ... Quadranten liegen, den nämlichen Sinus. Überhaupt ist

$$\sin u = \sin\left[\frac{\pi}{2} \mp \left(\frac{\pi}{2} - u\right) + 2k\pi\right]$$

wenn wir k der Reihe nach $= 0, 1, 2, 3, \ldots$ setzen und für jeden Werth von k nach einander das obere und untere Zeichen brauchen. Nennen wir x den gemeinschaftlichen Werth dieser Sinus, so folgt aus $\sin u = x$ die Gleichung $u = Arcsin\, x$, weil unter allen Bögen, welche x zum Sinus haben, u der kleinste (der Voraussetzung nach im ersten Quadranten liegende) ist. Wird aber ganz unbestimmt die Gleichung $\sin w = x$ gegeben, ohne dafs man schon vorher weifs, in welchem Quadranten w liegt, so kann w alle die Werthe

$$u,\ \pi - u,\ 2\pi + u,\ 3\pi - u,\ 4\pi + u,\ \ldots$$

haben, d. h. aus der Gleichung $\sin w = x$ folgt im Allgemeinen

$$w = \frac{\pi}{2} \mp \left(\frac{\pi}{2} - u\right) + 2k\pi$$

oder vermöge des Werthes von u,

$$w = \frac{\pi}{2} \mp \left(\frac{\pi}{2} - Arcsin\, x\right) + 2k\pi,$$

wobei für $k = 0$ das obere Zeichen dem ersten Quadranten, das untere dem zweiten, für $k = 1$ das obere dem fünften, das untere dem sechsten Quadranten u. s. w. entspricht.

Sind nun u und v zwei Bögen im ersten Quadranten $\sin u = x$, $\sin v = y$, folglich $u = Arcsin\, x$, $v = Arcsin\, y$, so ist

$$\begin{aligned}\sin(u + v) &= \sin u \cos v + \sin v \cos u \\ &= x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\end{aligned}$$

mithin nach dem Vorigen

$$u + v = \frac{\pi}{2} \mp \left[\frac{\pi}{2} - Arcsin\,(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2})\right] + 2k\pi,$$

oder

$$Arcsin\, x + Arcsin\, y$$
$$= \frac{\pi}{2} \mp \left[\frac{\pi}{2} - Arcsin\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})\right] + 2k\pi.$$

Hier ist nun noch zu bestimmen, ob das obere oder untere Zeichen und welcher Werth für k genommen werden soll. Die Summe zweier Bögen ist aber entweder ein Bogen im ersten oder zweiten Quadranten, weiter kann derselbe nicht reichen. Es mufs also nach dem Vorigen $k = 0$ und im ersten Falle das obere, im zweiten das untere Zeichen genommen werden. Demnach ist

für $u + v \leqq \frac{\pi}{2}$,

(1) $$Arcsin\, x + Arcsin\, y = Arcsin\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

und für $u + v > \frac{\pi}{2}$,

(2) $$Arcsin\, x + Arcsin\, y = \pi - Arcsin\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

Um nun zu entscheiden, ob die Summe der Bögen u und v im ersten oder zweiten Quadranten liegt, wenden wir uns an den Cosinus, welcher im ersten Quadranten positiv, im zweiten negativ ist. Man hat aber

$$\cos\,(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$
$$= \sqrt{1-x^2}\,.\,\sqrt{1-y^2} - xy.$$

Man wird folglich die Formel (1) oder (2) brauchen, je nachdem $xy < \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ oder $xy > \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ ist. Diese Ungleichheiten reduziren sich nach beiderseitiger Quadrirung und Hebung von x^2y^2 auf die folgenden

$$x^2 + y^2 < 1 \text{ und } x^2 + y^2 > 1.$$

Es ist also für $x^2 + y^2 < 1$,

(3) $$Arcsin\, x + Arcsin\, y = Arcsin\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

und für $x^2 + y^2 > 1$,

(4) $$Arcsin\, x + Arcsin\, y = \pi - Arcsin\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

Durch ähnliche Betrachtungen findet man auch

(5) $$Arcsin\, x - Arcsin\, y = Arcsin\,(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})$$

und hier ist weiter keine Bemerkung hinzuzufügen, weil die Differenz zweier Bögen des ersten Quadranten diesen nicht übersteigen kann. Für $y = x$ erhält man $Arcsin\, 0 = 0$, was man ohnehin weifs, für $x = 0$,

(6) $$-Arcsin\, y = Arcsin\,(-y)$$

was der Gleichung $\sin\,(-u) = -\sin u$ entspricht.

Ähnliche Formeln lassen sich leicht für die Funktion $Arccos\, x$ aufstellen. Sie sind aber wenig im Gebrauche, weil man die Behandlung von $Arccos\, x$ durch die Gleichungen

(7) $$Arccos\, x + Arcsin\, x = \frac{\pi}{2}$$

(8) $$Arccos\,(-x) - Arcsin\, x = \frac{\pi}{2}$$

welche unmittelbar aus der geometrischen Betrachtung dieser Funktionen fliefsen, leicht auf die von $Arcsin\, x$ reduzirt.

II. Sei wieder u ein Bogen im ersten Quadranten, so haben alle die Bögen

$$u,\ \pi + u,\ 2\pi + u,\ 3\pi + u, \ldots$$

welche der Reihe nach dem 1sten, 3ten, 5ten, 7ten Quadranten u. s. f. angehören, dieselbe Tangente, nämlich

$$tan\, u = tan\,(k\pi + u)$$

worin $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ gesetzt werden kann. Für $tan\, u = x$ ist $u = Arctan\, x$, weil u der kleinste aller zur Tangente x gehörenden Bögen ist. Aus einer Gleichung wie $tan\, w = x$ folgt demnach, wenn man nicht weifs, in welchem Quadranten w liegt,

$$w = k\pi + u = k\pi + Arctan\, x.$$

Für $tan\, u = x$, $tan\, v = y$ ist ferner

$$tan\,(u - v) = \frac{tan\, u - tan\, v}{1 + tan\, u\, tan\, v} = \frac{x - y}{1 + xy}$$

folglich wenn u und v im ersten Quadranten liegen,

$$u - v = k\pi + Arctan\, \frac{x - y}{1 + xy}$$

oder

$$Arctan\, x - Arctan\, y = k\pi + Arctan\, \frac{x - y}{1 + xy}.$$

Man bemerkt leicht, dafs hier $k = 0$ sein mufs, weil die Differenz zweier Bögen des ersten Quadranten nicht aufserhalb desselben liegen kann. Also ist

(9) $$Arctan\, x - Arctan\, y = Arctan\, \frac{x - y}{1 + xy}$$

Hieraus folgt z. B. für $x = y$, $Arctan\, 0 = 0$ und für $x = 0$,

(10) $$- Arctan\, y = Arctan\,(-y)$$

Durch ganz ähnliche Betrachtungen findet man leicht

(11) $$Arctan\, x + Arctan\, y = k\pi + Arctan\, \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Hier mufs man, wie früher, zwei Fälle unterscheiden. Entweder nämlich liegt $Arctan\, x + Arctan\, y$, d. h. $u + v$ im ersten Quadranten, dann ist $cos\,(u + v) = cos\, u\, cos\, v - sin\, u\, sin\, v$ positiv, mithin $sin\, u\, sin\, v < cos\, u\, cos\, v$ oder $tan\, u\, tan\, v < 1$, d. h. $xy < 1$. In diesem Falle mufs in (11) $k = 0$ sein, weil sonst rechts ein Bogen im drit-

ten Quadranten herauskäme. Ist aber $u + v$ gröfser als $\frac{\pi}{2}$, so wird $\cos(u + v)$ negativ, mithin $\sin u \sin v > \cos u \cos v$, woraus $xy > 1$ folgt. Dann wird der Nenner $1 - xy$ des letzten Ausdruckes in (11) negativ, und nach Formel (10) ist jetzt

$$Arctan\, x + Arctan\, y = k\pi - Arctan\, \frac{x + y}{xy - 1}.$$

Da nun links ein Bogen des zweiten Quadranten steht, so mufs rechts $k = 1$ sein, wenn nicht ein negativer Bogen oder ein im 4ten, 6ten u. s. w. liegender herauskommen sollte. Wir haben also für $xy < 1$,

(12) $$Arctan\, x + Arctan\, y = Arctan\, \frac{x + y}{1 - xy}$$

und für $xy > 1$,

(13) $$Arctan\, x + Arctan\, y = \pi - Arctan\, \frac{x + y}{xy - 1}.$$

Man sieht hieraus, dafs die Formel (9), welche für alle positiven x und y richtig ist, nicht unmittelbar für negative x oder y in Anspruch genommen werden darf, weil sich dann die Subtraktion in eine Addition verwandelt.

Durch die geometrische Bedeutung der Funktion $Arctan\, x$ überzeugt man sich auch leicht von der Richtigkeit der Gleichung:

(14) $$Arccot\, z + Arctan\, z = \frac{\pi}{2}.$$

III. Bemerkenswerthe Relationen zwischen $Arcsin\, x$ und $Arctan\, x$ erhält man auch auf folgende Weise:

Bezeichnet u einen spitzen Bogen, so ist

$$\tan u = \frac{\sin u}{\sqrt{1 - \sin^2 u}}$$

folglich

$$u = Arctan\, \frac{\sin u}{\sqrt{1 - \sin^2 u}}.$$

Setzen wir hier $\sin u = x$, so folgt $u = Arcsin\, x$, mithin

(15) $$Arcsin\, x = Arctan\, \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

d. h. der Bogen, dessen Sinus x ist, hat den Ausdruck $\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ zur Tangente.

Ferner ist für $\frac{\pi}{2} > u > 0$,

$$\sin u = \frac{\tan u}{\sqrt{1 + \tan^2 u}}$$

oder

$$u = Arcsin \frac{tan\, u}{\sqrt{1 + tan^2 u}}$$

aus $tan\, u = x$ folgt aber, weil u im ersten Quadranten liegt, $u = Arctan\, x$, mithin

$$(16) \qquad Arctan\, x = Arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

d. h. der Bogen, dessen Tangente x ist, hat den Ausdruck $\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ zum Sinus.

§. 3.

Die verschiedenen Arten von Funktionen.

Die grofse Unbestimmtheit, welche in dem Begriffe der Funktion im Allgemeinen liegt, macht eine Eintheilung der Funktionen in Klassen nöthig, wobei man als Eintheilungsgrund die verschiedenen Rechnungsoperationen nimmt, aus welchen die Funktionen hervorgehen. Man theilt nun gewöhnlich die arithmetischen Operationen in zwei Klassen, von denen die erste die Operationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplizirens, Dividirens und Potenzirens für constante Exponenten, wozu auch das Wurzelausziehen gehört, in sich begreift und die andere alle übrigen Arten von Operationen umfafst. Die Operationen der ersten Klasse nennt man algebraische, die der zweiten Klasse transscendente und theilt hiernach die Funktionen in algebraische und transscendente. Zu den ersteren gehören alle Funktionen, in welchen mit der darin enthaltenen veränderlichen Gröfse blofs algebraische Operationen vorgenommen werden, zu den zweiten die, in welchen die Veränderliche transscendenten Operationen unterworfen wird. Auf die Art und Weise, in welcher die constanten Gröfsen der Funktion auftreten, wird bei dieser Unterscheidung keine Rücksicht genommen.

Die algebraischen Funktionen theilt man noch in rationale und irrationale. Zu den ersteren gehören alle diejenigen, in welchen die veränderliche Gröfse unter keinem Wurzelzeichen, oder was das Nämliche ist, mit keinem gebrochenen Exponenten behaftet vorkommt, vorausgesetzt, dafs man alle angedeuteten Rechnungen so weit als möglich ausgeführt, also die Funktion selbst auf den möglichst einfachsten Ausdruck reduzirt hat. Die letztere Bemerkung ist defshalb nicht ganz überflüssig, weil eine Funktion als nicht rational erscheinen kann, so lange man sie nicht so weit als möglich reduzirt hat, z. B. die Funktion

$$(\sqrt{a} + \sqrt{x})\,(\sqrt{a} - \sqrt{x})$$

die man beim ersten Anblick nicht zu den rationalen rechnen würde, die aber in der That dazu gehört, weil sie sich bei Ausführung der Multiplikation auf $a - x$ reduzirt. Kommen dagegen in einer Funktion Wurzelzeichen vor, die sich nicht durch blofse Reduktion wegschaffen lassen, so heifst dieselbe eine irrationale.

Man unterscheidet bei den algebraischen Funktionen auch noch ganze und gebrochene. Zu den ersten rechnet man die, in deren Nenner die veränderliche Gröfse selbst nicht vorkommt, zu den zweiten die, in welchen die Variable auch im Nenner auftritt. So sind z. B.

$$a + bx + cx^2 \text{ und } \sqrt{a^2 - b^2x^2}$$

eine rationale und irrationale ganze Funktion, dagegen

$$\frac{a + bx}{c + dx^2} \text{ und } \frac{a - \sqrt{x}}{cx}$$

eine rationale und irrationale gebrochene algebraische Funktion.

Da in einer rationalen algebraischen Funktion keine anderen Rechnungsoperationen als die vier Spezies und die Erhebung auf eine Potenz von ganzen Exponenten vorkommen dürfen, so sieht man leicht, dafs eine ganze Funktion dieser Art unter der allgemeinen Form

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_mx^m$$

stehen mufs, in welcher A_0, A_1, ... A_m constante Zahlen (gleichviel ob ganze oder Brüche) bedeuten, von denen natürlich auch eine oder mehrere $= 0$ oder negativ sein können. Der höchste aller vorkommenden Exponenten bestimmt den Grad der Funktion. In unserem Falle ist die Funktion vom Grade m, weil die einzelnen Glieder nach den steigenden Potenzen von x geordnet sind, also der letzte Exponent m der gröfste ist. Eine gebrochene rationale algebraische Funktion läfst sich immer auf das allgemeine Schema

$$\frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_mx^m}{B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_nx^n}$$

bringen, in welchem B_0, B_1, ... B_n ebenfalls constante Zahlen sind. Die Differenz der höchsten vorkommenden Exponenten, also hier $m - n$, giebt dann den Grad der Funktion an.

Es kann auch der Fall eintreten, dafs man wohl im voraus weifs, eine gewisse Gröfse sei eine Funktion einer anderen vorhandenen Gröfse, aber die Form dieser Funktion selbst nicht sogleich angeben kann. Z. B. wenn x und y beliebige Gröfsen bedeuten, kann die Gleichung

$$xy - ax + by = c$$

nur dann bestehen, wenn y eine gewisse Funktion von x und ebenso umgekehrt x eine gewisse Funktion von y ist. Denn wenn man dem x einen

beliebigen Werth giebt, so ist y schon nicht mehr willkührlich und sein Werth kann durch Auflösung der Gleichung nach y gefunden werden. Ebenso verhält es sich umgekehrt mit x. In solchen Fällen, wo man zwar weifs, dafs die eine Gröfse eine Funktion der anderen sei, ohne dafs man ihre Form näher zu bestimmen im Stande ist, nennt man die eine Gröfse eine unentwickelte oder ungesonderte Funktion der anderen. Kann man aber die Form näher angeben, so hat man eine entwickelte oder gesonderte Funktion. Diese Sonderung der Veränderlichen würde sich in der oben angeführten Funktion leicht durch beiderseitige Subtraktion von ab bewirken lassen. Man erhält dann

$$(x+b)(y-a) = c - ab$$

und daraus

$$x = -b + \frac{c-ab}{y-a}, \quad y = a + \frac{c-ab}{x+b}.$$

Ebenso ist in der Gleichung

$$u + x \sin u = 0$$

u so lange eine ungesonderte Funktion von x, als man nicht eine Gleichung von der Form $u = \ldots$ aufweisen kann, aus welcher für jedes beliebige x das zugehörige u berechnet werden könnte.

Es giebt endlich noch eine Eintheilung der Funktionen, welche sich aber nicht auf die Operationen, sondern auf die Eigenschaften derselben gründet. Manche Funktionen haben nämlich die Eigenschaft, dafs sie nach einem gewissen Intervalle wieder die Werthe annehmen, die sie früher schon einmal gehabt haben, wie z. B. der Sinus, in welchem $\sin(2\pi + x) = \sin(4\pi + x) = \sin(6\pi + x) \ldots = \sin x$ ist; Funktionen dieser Art heifsen periodische, während alle anderen, welchen die genannte Eigenschaft abgeht, nichtperiodische heifsen. Das Kennzeichen einer periodischen Funktion $f(x)$ ist, dafs es eine constante Gröfse a giebt, für welche

$$f(x) = f(a + x) = f(2a + x) = f(3a + x) \ldots$$

wird, wobei man a das Intervall der Periodizität nennen kann. Für $f(x) = \sin x$ beträgt dasselbe 2π, für $f(x) = \tan x$ ist $a = \pi$. In der niederen Analysis scheiden sich durch diese Eintheilung die goniometrischen Funktionen von den übrigen.

§. 4.

Die geometrische Darstellung der Funktionen.

I. Man kann sich von einer Funktion einer einzigen Variabelen sehr leicht ein geometrisches Bild verschaffen, wenn man den in einer Gleichung wie

$$y = f(x)$$

vorkommenden Veränderlichen eine geometrische Bedeutung unterlegt. Das einfachste in dieser Beziehung ist, dafs man die Zahlen x und y als die Längen gerader Linien ansieht und letztere nach irgend einem Maafsstabe construirt, indem man eine Gerade von willkührlich festgesetzter Länge als die Linie Eins annimmt. Um aber die zusammengehörigen Werthe von x und y übersichtlich bei einander zu haben, pflegt man eine unbestimmte lange Gerade XX' (Fig. 1) als Basis und einen festen Punkt O in ihr als Ausgangspunkt der Construktion zu wählen und zwar in der Weise, dafs man die verschiedenen Geraden, welche die individuellen Werthe von x darstellen, jedesmal von O aus abschneidet ($OM = x$) und die zugehörigen Geraden, welche die entsprechenden Werthe von y angeben, senkrecht an den Endpunkten jener Strecken errichtet ($MP = y$). Mit anderen Worten, und in der Sprache der analytischen Geometrie ausgedrückt, heifst Diefs: man denke sich die unabhängige Variable x als Abscisse und die abhängige Variable als rechtwinklige Ordinate irgend eines Punktes in der Ebene. Da nun aber y nicht willkührlich ist, sondern im Gegentheile aus x durch gewisse Rechnungsoperationen abgeleitet werden kann, so erhält man durch diese Construktion nicht willkührliche Punkte in der Ebene, sondern solche, die mit einer gewissen Regelmäfsigkeit auf einander folgen und in dieser Regelmäfsigkeit irgend eine gerade oder krumme Linie bilden. Diese Linie, von welcher $y = f(x)$ die Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten ist, stellt nun das geometrische Bild der Funktion $f(x)$ dar.

Nach dieser Erörterung hat es keine Schwierigkeit, diejenigen Curven zu construiren, deren Gleichungen entstehen, wenn man die einfachen Funktionen der Reihe nach $= y$ setzt, also $y = a + x$, $y = a - x$, $x = bx$, $y = \frac{c}{x}$, $y = x^\alpha$ u. s. w. Hierbei lassen sich die drei ersten Funktionen in der gemeinschaftlichen Form

$$y = a + bx$$

zusammenfassen und ihr Bild ist eine gerade Linie, welche von der Ordinatenachse eine Strecke $= a$ abschneidet und mit der Abscissenachse einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente $= b$ ist; denn ziehen wir (Fig. 1) $BQ \parallel OM$ und setzen $OB = MQ = a$, $\angle MAP = \angle QBP = \beta$, $OM = x$, $MP = y$, so findet die Gleichung

$$\begin{aligned} y &= MQ + PQ \\ &= a + x \tan\beta \end{aligned}$$

statt, welche mit der obigen übereinstimmt, wenn $\tan\beta$ mit b bezeichnet wird. — Die Bilder der übrigen Funktionen dagegen sind krumme Linien;

so charakterisirt z. B. $y = \frac{c}{x}$ eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten zu Coordinatenachsen genommen sind und deren Achse $= \sqrt{2c}$ ist.

II. Auf analoge Weise wie die Funktionen einer einzelnen Variabelen lassen sich auch die Funktionen zweier Variabelen geometrisch construiren. Denken wir uns in der Gleichung

$$z = f(x, y)$$

die Variabelen $x, y, z,$ von denen die ersten beiden die unabhängigen sind, als rechtwinklige räumliche Coordinaten, so entsteht folgende Construktion. Durch die beiden willkührlichen Coordinaten x und y wird zunächst ein völlig beliebiger Punkt in einer Ebene (der Coordinatenebene xy) bestimmt; errichtet man in diesem Punkte eine Senkrechte von der Länge z auf jener Ebene, so erhält man einen Punkt im Raume, von welchem x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten sind, wie $OM = x$, $MN = y$, $NP = z$ in Fig. 2. Jedem Punkte N der Ebene xy entspricht jetzt ein Punkt P im Raume, von welchem N die Horizontalprojektion darstellt, der Gesammtheit aller in der Ebene xy liegenden Punkte entspricht demnach eine räumliche Gesammtheit von Punkten, oder kürzer eine Fläche. Welcher Art diese Fläche sei, entscheidet sich aus der Natur der Durchschnitte, welche sie mit den Coordinatenebenen oder dazu parallelen Ebenen bildet; ist z. B.

$$z = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

so durchschneidet diese Fläche die Coordinatenebene xz in einer Geraden, deren Gleichung $z = kx$ ist, wie man durch die Supposition $y = 0$ sogleich findet; ebenso wird die Coordinatenebene yz (wo nun $x = 0$) in einer Geraden durchschnitten, deren Gleichung $z = ky$ ist; nimmt man endlich z constant $= h$, so erhält man für die Gleichung des Durchschnittes mit einer zu xy in der Entfernung $OH = h$ parallel gelegten Ebene:

$$x^2 + y^2 = \frac{h^2}{k^2}$$

und dieser Durchschnitt ist ein Kreis, mithin die Fläche selbst eine gerade Kegelfläche.

Weiter als bis zu den Funktionen zweier Variabelen reicht indessen die geometrische Darstellung der Funktionen nicht; denn um die Funktionen e i n e r Veränderlichen zu construiren, bedurften wir zweier Dimensionen (für die unabhängige und abhängige Variabele), indem wir die Construktion in der Ebene ausbreiteten; für die Darstellung der Funktionen zweier Variabelen waren drei Dimensionen nöthig und mithin würden zur Construktion der Funktionen von drei oder mehreren Variabelen

vier oder noch mehr Dimensionen des Raumes erforderlich werden, die aber für uns nicht existiren. Hier wird also der Calcül der Anschauung überlegen, ein Phänomen, welches man öfter zu beobachten Gelegenheit finden wird.

Capitel II.
Die Gränzwerthe der Funktionen.

§. 5.
Begriff der Gränze.

Da in einer Funktion die veränderliche Gröfse alle möglichen Werthe annehmen darf, so kann man dieselbe auch auf die Weise sich verändern lassen, dafs sie von irgend einer Stelle an sich beständig vergröfsert, und gröfser als jede angebbare Zahl werden kann, oder dafs sie sich beständig vermindert und kleiner als jede angebbare Zahl werden kann, also sich der Null fortwährend mehr und mehr nähert. Hierdurch wird nun auch eine beständige Veränderung in den Werthen der Funktion herbeigeführt werden, die sich bei der unbestimmten Allgemeinheit, welche in dem Begriffe der Funktion liegt, schlechthin nicht angeben läfst. Ein Fall aber bedarf ganz besonderer Aufmerksamkeit. Es kann nämlich vorkommen, dafs die Funktion sich mehr und mehr einer bestimmten Gränze nähert, wenn die in ihr enthaltene Variabele fortwährend ins Unbestimmte hinaus zunimmt. Diefs ist z. B. der Fall bei der Funktion

$$a + \frac{1}{x},$$

deren zweiter Theil für wachsende x fortwährend abnimmt. Denn setzen wir der Reihe nach $x = n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots$ wo n eine beliebige positive Zahl bedeutet, so ist

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3} \cdots$$

Diese Abnahme geht aber so weit, dafs $\frac{1}{n}$ kleiner werden kann, als jede noch so kleine angebbare Gröfse. Soll nämlich $\frac{1}{n} < \varrho$ sein, wo ϱ irgend eine beliebige kleine Gröfse bedeutet, so braucht man blos $n > \frac{1}{\varrho}$ zu nehmen, um sogleich die Forderung zu erfüllen. Die Gränze, welcher

sich $\frac{1}{n}$ nähert, mufs folglich die Null sein. Mithin nähert sich die Funktion $a + \frac{1}{x}$ für wachsende x beständig der Gränze a.

Wir wollen diese bei verschiedenen Funktionen eintretenden Annäherungen an feste Gränzen noch etwas deutlicher zu machen suchen. Schon in der Arithmetik begegnet man der Erscheinung einer fortwährenden Annäherung an einen gewissen Gränzwerth, und zwar zum ersten Male bei der Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Dezimalbruch. So ist z. B. $\frac{1}{9} = 0{,}11111 \ldots$, d. h.

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \ldots$$

wobei man sich diese Reihe ins Unendliche fortgesetzt zu denken hat. Man kann sich nun vorstellen, diese unendliche Reihe sei dadurch entstanden, dafs man in der endlichen Reihe

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^n},$$

welche n Glieder enthält, die Zahl n ins Unendliche habe wachsen lassen. Die Summe dieser endlichen Reihe ist aber offenbar eine Funktion von n, weil sie eine andere sein wird, je nachdem man mehr oder weniger Glieder zusammennimmt, d. h. je nachdem die Gliederanzahl n gröfser oder kleiner ist. Setzen wir also

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^n} = f(n),$$

so ist jetzt $f(n)$ eine Funktion, welche sich für wachsende n unbegränzt und bis zu jedem Grade der Genauigkeit der Gränze $\frac{1}{9}$ nähert, weil diefs auf der linken Seite der Fall ist.

Etwas ganz Ähnliches findet bei den Irrationalzahlen statt. Denn es ist z. B. $\sqrt{2} = 1{,}414213 \ldots$ oder

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \ldots$$

wobei nun $\sqrt{2}$ nichts Anderes bedeutet als den Gränzwerth, welchem man sich fortwährend nähert, wenn man immer mehr und mehr Glieder der Reihe rechts zusammennimmt.

Auch geometrisch läfst sich die Erscheinung der beständigen Annäherung an eine feste Gränze deutlich machen. Suchen wir z. B. die krumme Linie, welche das Bild der Funktion $a + \frac{1}{x}$ darstellt, indem wir $a + \frac{1}{x} = y$ setzen, so erhalten wir für $x = 1, 2, 3, \ldots$ der Reihe

nach $y = a + 1,\ a + \frac{1}{2},\ a + \frac{1}{3}, \ldots$ d. h. Gröfsen, welche immer weniger und weniger von a differiren. Construiren wir dieselben als Ordinaten, so entsteht eine krumme Linie, welche sich mehr und mehr einer in der Entfernung a zur Abscissenachse parallelen Geraden nähert, ohne dieselbe jemals erreichen zu können (Asymptote).

Dafs in der That eine solche fortwährende Annäherung an eine Gränze möglich ist, ohne dafs man jemals behaupten könnte, diese selbst erreicht zu haben, liegt an der unendlichen Theilbarkeit der Dinge, d. h. darin, dafs man bei der successiven Theilung einer Gröfse niemals auf einen letzten untheilbaren Theil stöfst. Ziehe ich z. B. einen Strich von *A* nach *B*, Fig. 3, so kann ich mir denken, ich hätte erst die Hälfte desselben *AM* vollendet, dann von der übrigen bleibenden Hälfte *MB* die Hälfte *MN*, hierauf von dem übrigen Stücke *NB* wieder die Hälfte *NP*, dann von diesem wieder die Hälfte *PQ* u. s. f. Hier wird also eine vollendete Gröfse *AB* in eine Reihe immer kleinerer Theile zerlegt, in eine Reihe, welche sich nie schliefst, weil man bei der Theilung selbst nie auf ein untheilbares Letztes kommt. Statt dieses regressiven Verfahrens der Theilung ohne Ende könnte man jetzt umgekehrt das progressive der Zusammensetzung des Ganzen aus seinen Theilen versuchen. Diefs ist nun zwar eine ebenso unvollendbare Operation, wie die vorige der Zerlegung, weil hinter jedem schon mitgezählten Theile ein anderer kleinerer kommt, der ebenfalls mitgerechnet sein will; aber man weifs doch schon im Voraus, was herauskommen würde, wenn man wirklich alle Theile zusammenrechnen könnte, offenbar nämlich dasselbe, was man vorher getheilt hatte. Es ist also

$$AB = AM + MN + NP + PQ + \ldots \textit{ in inf.}$$

d. h.

$$AB = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{4}AB + \frac{1}{8}AB + \ldots$$

folglich auch:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

d. i.

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots$$

Da hier aber die wirkliche Ausführung der Summation ins Unendliche hinab eine blofse Idee und in Wirklichkeit nicht ausführbar ist, so mufs man sich dieser Idee wenigstens zu nähern suchen, und dies geschieht mittelst des Begriffes der Gränze. Nehmen wir also jene Reihe vorerst

als eine endliche und betrachten ihre Summe als Funktion ihrer Gliederanzahl, setzen also:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=f(n),$$

so ist jetzt $f(n)$ eine Funktion von n, welche sich für wachsende n mehr und mehr einer bestimmten Gränze nähert, nämlich der Einheit; in der That ergiebt sich, wenn man der Reihe nach ein, zwei, drei und mehr Glieder zusammennimmt,

$$f(1)=\frac{1}{2},\ f(2)=\frac{3}{4},\ f(3)=\frac{7}{8},\ f(4)=\frac{15}{16},\ \ldots$$

also Zahlen, welche immer weniger von 1 verschieden sind.

Zur Bezeichnung der Gränze, welcher sich eine Funktion für wachsende oder abnehmende Werthe ihrer Veränderlichen beständig nähert, bedient man sich des Zeichens *Lim* (von *Limes* die Gränze), welches man vor den Ausdruck setzt, dessen Gränze angegeben werden soll. Der Sinn einer Gleichung wie

$$Lim\left(a+\frac{1}{x}\right)=a, \text{ für wachsende } x,$$

ist hiernach: für wachsende x nähert sich die Funktion $a+\frac{1}{x}$ der Gränze a; ebenso sagt die Gleichung

$$Lim\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right]=1, \text{ für wachsende } n,$$

nichts Anderes, als: je mehr Glieder der Reihe man summirt, desto weniger differirt diese Summe von der Einheit.

Die Bestimmung der Gränze, welcher sich eine Funktion für abnehmende Werthe der Veränderlichen nähert, ist leicht auf den Fall einer Gränzbestimmung für wachsende Werthe zurückzuführen. Hätte man nämlich für abnehmende δ die Gränze $Lim\, f(\delta)$ zu bestimmen, so kann man sich die Abnahme des δ dadurch entstehend denken, dafs man $\delta=\frac{1}{n}$ setzt und jetzt die beliebige Zahl n fortwährend wachsen läfst. Es kommt also dann die Bestimmung von $Lim\, f(\delta)$ für abnehmende δ auf die Bestimmung von $Lim\, f\left(\frac{1}{n}\right)$ für wachsende n zurück. Auch umgekehrt gilt etwas Ähnliches. Aus $\delta=\frac{1}{n}$ folgt nämlich $n=\frac{1}{\delta}$; läfst man hier δ immer kleiner werden, so wächst n fortwährend und kann jede noch so grofse gegebene Zahl übersteigen, wenn man nur δ klein genug nimmt. Hat man also $Lim\, f(n)$ für wachsende n aufzusuchen, so kann man

$n = \frac{1}{\delta}$ setzen, wo jetzt δ eine beständig abnehmende Gröfse ist, und reduzirt jetzt jene Aufgabe auf die Bestimmung von $Lim\, f\left(\frac{1}{\delta}\right)$ für abnehmende δ.

Dafs der Quotient $\frac{1}{n}$ kleiner gemacht werden kann, als jede angebbare Zahl, wenn man nur n grofs genug nimmt, läfst sich auch durch die Gleichung

$$Lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \quad \text{für wachsende } n,$$

bezeichnen. Umgekehrt aber läfst sich keine Gränze angeben, der sich der Quotient $\frac{1}{\delta}$ für abnehmende δ näherte, weil derselbe gröfser als jede angebbare Zahl gemacht werden kann. Um aber eine Gleichförmigkeit in der Bezeichnung herbeizuführen, hat man eine beständig wachsende Gröfse, die jede gegebene Zahl übersteigen kann, mit dem Zeichen ∞ belegt, so dafs man also auch setzen kann

$$Lim\left(\frac{1}{\delta}\right) = \infty, \quad \text{für abnehmende } \delta.$$

Man mufs sich hüten, hier das Zeichen ∞ für eine bestimmte Gröfse zu halten, wie etwa eine Zahl; der Sinn der obigen Gleichung ist ganz einfach; wollte man die Gränze suchen, der sich $\frac{1}{\delta}$ für abnehmende δ nähert, so müfste man über jede noch so grofse gegebene Zahl hinausgehen, was eine unausführbare Idee ist. Man darf sich auch nicht einfallen lassen, mit den Zeichen 0 und ∞ nach den Regeln der Arithmetik rechnen zu wollen. Denn die Arithmetik lehrt uns blos mit endlichen bestimmten Gröfsen, nicht aber mit einem Nichts oder einem sich beständig ändernden Dinge rechnen; man würde sich also eine ganz überrechtliche, willkührliche Ausdehnung der arithmetischen Regeln zu Schulden kommen lassen.

§. 6.

Bestimmung der einfachsten Gränzwerthe.

Wir wollen für diesen Paragraphen, um des jedesmaligen Zusatzes: für wachsende oder für abnehmende x überhoben zu sein, eine beständig abnehmende Gröfse mit δ und eine über alle Gränzen hinaus wachsende mit ω bezeichnen, so dafs man aus der Bezeichnung selbst gleich erkennt, ob man den Gränzwerth eines Ausdruckes für abnehmende oder wachsende Werthe der Veränderlichen zu suchen habe. Als Anhaltepunkt für weitere Gränzbestimmungen dienen die bisher gefundenen Gleichungen

$$Lim\ \delta = 0, \quad Lim\ \omega = \infty$$

$$Lim\ \frac{1}{\delta} = \infty, \quad Lim\ \frac{1}{\omega} = 0$$

von denen die ersten zwei aus dem Begriffe von δ und ω selbst hervorgehen, die zwei letzten im vorigen Paragraphen bewiesen worden sind. Mit diesem einfachen Apparate ausgerüstet, wollen wir nun eine Reihe von Beispielen durchgehen.

1) Hätte man $Lim\ \frac{a\delta}{b\delta}$ zu bestimmen, worin a eine constante Gröfse bezeichnet, so braucht man nur das δ im Zähler und Nenner zu heben, um sogleich die Gränze zu finden. Dafs es erlaubt sei, das δ im Nenner gegen das im Zähler stehende zu streichen, obgleich die δ sich beständig ändern, erhellt daraus, dafs die Gröfse δ, wie klein man sie auch nehmen mag, doch immer sich selbst gleich sein mufs; setzt man also im Zähler für δ einen auch noch so kleinen Bruch, so wird man für das im Nenner befindliche δ offenbar den nämlichen Bruch setzen müssen, wobei man in jedem Falle heben kann. Es ist also $Lim\ \frac{a\delta}{b\delta} = \frac{a}{b}$, wie man auch schon daraus sieht, dafs die Funktion $y = \frac{ax}{bx}$ eine Constante ist, die für alle Werthe von x, also auch noch so kleine, den nämlichen Werth von y giebt.

Wollte man in der Funktion $\frac{a\delta}{b\delta}$ statt zu heben, gleich sagen: im Zähler nähert sich δ der Null, folglich auch $a\delta$ der Null und ähnlich im Nenner, so würde man auf den unbrauchbaren Ausdruck $\frac{0}{0}$ stofsen, mit dem sich defshalb nichts weiter anfangen läfst, weil die Arithmetik uns nicht mit ihm rechnen gelehrt hat. Indessen wissen wir dieses Mal doch, was er bedeutet, nämlich soviel als $Lim\ \frac{a\delta}{b\delta}$, und da diefs $= \frac{a}{b}$ ist, so haben wir für diesen Fall

$$\frac{0}{0} = \frac{a}{b},$$

so dafs also $\frac{0}{0}$ jede beliebige endliche Gröfse bezeichnen kann.

2) Es sei $Lim\ \frac{a\delta^2}{b\delta}$ zu bestimmen. Hebt man hier das δ des Nenners gegen ein δ des Zählers, was offenbar für jedes auch noch so kleine δ richtig ist, so ist

$$\frac{a\delta^2}{b\delta} = \frac{a}{b}\delta$$

mithin auch

$$Lim\,\frac{a\delta^2}{b\delta} = Lim\,\frac{a}{b}\,\delta.$$

Da aber δ immer kleiner wird, so verkleinert sich auch $\frac{a}{b}\,\delta$ beständig und es nähern sich also δ und $\frac{a}{b}\,\delta$ gleichzeitig der Null. Folglich ist

$$Lim\,\frac{a\delta^2}{b\delta} = 0.$$

Wollte man hingegen, ohne zu heben, so schliefsen: für abnehmende δ nähert sich δ^2, folglich auch $a\delta^2$ und ebenso $b\delta$ der Null, so würde man

$$Lim\,\frac{a\delta^2}{b\delta} = \frac{0}{0}$$

finden, so dafs in diesem Falle wegen des vorigen Gränzwerthes

$$\frac{0}{0} = 0$$

sein mufs.

3) Es sei $Lim\,\frac{a\delta}{b\delta^2}$ aufzusuchen. Hebt man hier das δ im Zähler gegen ein δ im Nenner, so bleibt

$$Lim\,\frac{a\delta}{b\delta^2} = Lim\,\frac{a}{b\delta} = Lim\,\frac{a}{b}\,.\,\frac{1}{\delta}.$$

Nun wird aber $\frac{1}{\delta}$ immer gröfser, je mehr δ abnimmt, folglich mufs auch der Ausdruck $\frac{a}{b}\,.\,\frac{1}{\delta}$ für abnehmende δ beständig wachsen. Es wird also

$$Lim\,\frac{a\delta}{b\delta^2} = \infty$$

Wollte man δ nicht heben, sondern sagen: bei abnehmenden δ nähern sich $a\delta$ und $b\delta^2$ gleichzeitig der Null, so erhielte man

$$Lim\,\frac{a\delta}{b\delta^2} = \frac{0}{0}$$

und durch Vergleichung mit dem vorigen Gränzwerthe

$$\frac{0}{0} = \infty.$$

Man sieht hieraus, dafs der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ganz unbestimmt und vieldeutig ist, da er sowohl jede endliche Gröfse $\frac{a}{b}$, wie auch 0 und ∞ bedeuten kann. Welchem von diesen Werthen in jedem speziellen Falle der Ausdruck $\frac{0}{0}$ gleich zu setzen sei, kann man nur dann erfahren, wenn man

die Entstehungsweise der beiden Nullen kennt, d. n. wenn man den Ausdruck $\frac{0}{0}$ als Gränze einer anderweit gegebenen Funktion betrachtet.

4) Wie man durch solche Gränzbestimmungen zu neuen Sätzen gelangen kann, wollen wir an folgendem Beispiele zeigen. Setzt man in der Gleichung

$$Arctan\, x + Arctan\, y = Arctan\, \frac{x+y}{1-xy}$$

$y = \frac{1}{x+\delta}$, so erhält man nach einer leichten Reduktion auf der rechten Seite

$$Arctan\, x + Arctan\, \frac{1}{x+\delta} = Arctan\, \frac{x(x+\delta)+1}{\delta}.$$

Lassen wir hier δ immer kleiner werden, so nähert sich $x+\delta$ der Gränze x und der Quotient

$$\frac{x(x+\delta)+1}{\delta}$$

wächst ins Unendliche hinaus, so dafs er jede gegebene Zahl übersteigen kann. Je gröfser aber die Tangente eines Bogens ist, desto näher liegt der Bogen selbst an $\frac{\pi}{2}$, weil umgekehrt die Tangenten ins Unendliche wachsen, wenn man näher und näher an $\frac{\pi}{2}$ kommt. Der Bogen also, welcher jenen Quotienten zur Tangente hat, nähert sich mehr und mehr der Gränze $\frac{\pi}{2}$. Gehen wir nun rechts und links zu den Gränzen für abnehmende δ über, so erhalten wir die wichtige Gleichung

$$(1) \qquad Arctan\, x + Arctan\, \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Wir wollen uns jetzt mit der Aufsuchung einiger Gränzen für wachsende Werthe der Veränderlichen beschäftigen.

5) Zuerst bemerkt man leicht, dafs der Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$ denselben Charakter der Unbestimmtheit und Vieldeutigkeit an sich trägt, wie der entsprechende $\frac{0}{0}$, wobei man zu beachten hat, dafs in jedem Ausdrucke das Zeichen ∞ nicht etwa ein bestimmtes Quantum als Ganzes genommen, sondern eine beständig fort wachsende Zahl bedeutet. Um sich immer daran zu erinnern, kann man etwa setzen

$$\infty = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \text{ und immer so fort}$$

und diefs als Definition von ∞ festhalten. Wenn man nun in den Ausdrücken

$$\frac{a\omega}{b\omega}, \quad \frac{a\omega^2}{b\omega}, \quad \frac{a\omega}{b\omega^2}$$

ω ins Unendliche wachsen läfst, so gehen sie in die gemeinschaftliche Form $\frac{\infty}{\infty}$ über. Hebt man dagegen Zähler und Nenner mit ω, was für jedes auch noch so grofse ω erlaubt sei, so findet man der Reihe nach

$$Lim\,\frac{a\omega}{b\omega} = \frac{a}{b}$$

$$Lim\,\frac{a\omega^2}{b\omega} = \infty$$

$$Lim\,\frac{a\omega}{b\omega^2} = 0$$

so dafs also der Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$ ebensowohl eine endliche Gröfse $\frac{a}{b}$, als ∞ und 0 bedeuten kann. Man darf daher auch mit dem Quotienten $\frac{\infty}{\infty}$ nicht schlechthin rechnen, sondern nur in so fern, als derselbe einem Gränzenübergange seine Entstehung verdankt.

6) Um den Gränzwerth des Quotienten

$$\frac{a+\omega}{\omega}$$

zu ermitteln, braucht man nur mit dem Nenner in jedes Glied des Zählers zu dividiren, wodurch die Gleichung

$$\frac{a+\omega}{\omega} = \frac{a}{\omega} + 1 = 1 + a\,.\,\frac{1}{\omega}$$

erscheint, und in dieser ω ins Unendliche wachsen zu lassen. Man erhält dann

$$(2) \qquad Lim\,\frac{a+\omega}{\omega} = 1$$

weil $Lim\,\frac{1}{\omega}$, also auch $Lim\,\frac{a}{\omega} = 0$ ist.

7) Es sei die Gränze des Ausdrucks

$$\frac{\omega}{a+\omega}$$

aufzusuchen. Man kann hier auf doppelte Weise verfahren; einmal nämlich ist

$$\frac{\omega}{a+\omega} = 1 - \frac{a}{a+\omega}$$

und dann auch durch Division des Zählers und Nenners mit ω:

$$\frac{\omega}{a+\omega} = \frac{1}{\frac{a}{\omega}+1}.$$

In der ersten Form nimmt für wachsende ω der Quotient $\frac{a}{a+\omega}$ beständig ab und nähert sich fortwährend der Null. Man bekommt also durch Übergang zur Gränze

(3) $$Lim \frac{\omega}{a+\omega} = 1.$$

In der zweiten Form wird der Quotient $\frac{a}{\omega}$ immer kleiner und nähert sich der Gränze 0, folglich der ganze Nenner $1+\frac{a}{\omega}$ der Gränze 1; mithin ist wieder

$$Lim \frac{\omega}{a+\omega} = 1$$

wie vorher.

Man leitet ebenso leicht das allgemeinere Theorem ab:

(4) $$Lim \frac{b+\omega}{a+\omega} = 1$$

welches sich auch in Worten ausdrücken läfst, nämlich: „Addirt man zu Zähler und Nenner eines Bruches dieselben, aber immer gröfsere Zahlen, so nähert sich der Werth desselben fortwährend der Einheit."

So nähern sich z. B. die Brüche

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots;$$

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$$

die dadurch entstehen, dafs man im Zähler und Nenner immer 1 addirt, fortwährend der Einheit, wie man auch daraus sieht, dafs man sie so schreiben kann:

$$1-\frac{1}{2}, \ 1-\frac{1}{3}, \ 1-\frac{1}{4}, \ 1-\frac{1}{5}, \ 1-\frac{1}{6}, \ldots$$

$$1+\frac{1}{1}, \ 1+\frac{1}{2}, \ 1+\frac{1}{3}, \ 1+\frac{1}{4}, \ 1+\frac{1}{5}, \ldots$$

wobei in der ersten Reihe eine beständige Zunahme, in der zweiten eine Abnahme satt findet.

8) Ein wichtiger hieher gehörender Satz ist noch der, dafs für jedes $a > 1$,

$$Lim\, a^{\omega} = \infty$$

ist. Man sieht die Richtigkeit desselben leicht auf den ersten Blick ein, wenn a eine ganze Zahl > 1 ist, dagegen erhellt diefs nicht so unmittelbar, wenn a nur wenig von der Einheit differirt. Denn obschon man leicht bemerkt, dafs die Potenzen a, a^2, a^3, ... in diesem Falle zuneh-

men, so folgt hieraus doch nicht, dafs jenes Wachsthum ins Unendliche fortgeht. Nun ist aber durch gewöhnliche Division

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1$$

wobei rechter Hand n Summanden vorkommen. Wegen der Voraussetzung $a > 1$ ist auch jede der Potenzen $a, a^2, \ldots a^{n-1}$ gröfser als Eins; setzt man daher in der obigen Gleichung rechts die Eins an die Stelle jeder Potenz von a, so hat man zu wenig gesetzt und es ist folglich wegen der n Summanden

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} > n$$

oder durch Multiplikation mit $a - 1$ und Transposition

$$a^n > 1 + n(a - 1).$$

Wenn nun n ins Unendliche wächst, so kann das Produkt $n(a - 1)$ jede angebbare Zahl übersteigen und es folgt daraus um so mehr

(5) $$Lim\, a^\infty = \infty, \quad \text{für } a > 1.$$

Wäre dagegen $a < 1$, so kann man $a = \frac{1}{b}$ setzen, wo nun $b > 1$ ist; dann wird

$$Lim\, a^\infty = Lim \frac{1}{b^\infty} = 0$$

weil nun b^∞ ins Unendliche wächst und folglich $\frac{1}{b^\infty}$ sich der Gränze Null nähert.

§. 7.

Allgemeine Sätze über Gränzbestimmungen.

Wenn eine Funktion aus mehreren anderen Funktionen zusammengesetzt ist, deren einzelne Gränzwerthe bekannt sind, so entsteht die Frage, wie man den Gränzwerth der zusammengesetzten Funktion aus den Gränzwerthen ihrer einzelnen Bestandtheile herleiten soll. So besteht z. B. die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{1 + x} \,.\, Arctan\, x$$

aus zwei Faktoren, von denen der erste sich der Gränze Eins und der zweite der Gränze $\frac{1}{2}\pi$ nähert, wenn x unendlich wächst, und es bleibt nun noch zu untersuchen, wie sich $Lim\, f(x)$ aus jener 1 und $\frac{1}{2}\pi$ bildet. In solchen Fällen bedient man sich der nachfolgenden Sätze.

I. Nähert sich die Funktion $\varphi(x)$, gleichviel ob für wachsende oder abnehmende x, der Gränze a, so darf man $\varphi(x) = a + \delta$ setzen, worin δ zwar eine an sich unbekannte Gröfse ist, von der man aber wenigstens weifs, dafs sie verschwindet, wenn man von $\varphi(x)$ zu $Lim\, \varphi(x)$ übergeht, weil in diesem Falle die Gleichung $Lim\, \varphi(x) = a$, der Voraussetzung nach, herauskommen soll. Ist ebenso $Lim\, \psi(x) = b$, so darf $\psi(x) = b + \varepsilon$ gesetzt werden, wo nun auch ε beim Übergange zur Gränze verschwindet. Man hat nun

$$\begin{aligned}\varphi(x) \pm \psi(x) &= a + \delta \pm (b + \varepsilon)\\ &= a \pm b + \delta \pm \varepsilon\end{aligned}$$

folglich

$$Lim\, [\varphi(x) \pm \psi(x)] = a \pm b$$

oder vermöge der Werthe von a und b

(1) $$Lim\, [\varphi(x) \pm \psi(x)] = Lim\, \varphi(x) \pm Lim\, \psi(x)$$

d. h. der Gränzwerth einer Summe oder Differenz wird dadurch gefunden, dafs man die Gränzwerthe der einzelnen Bestandtheile addirt resp. subtrahirt.

Hat man allgemeiner für m verschiedene Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_m(x)$

$$Lim\, \varphi_1(x) = a_1, \quad Lim\, \varphi_2(x) = a_2, \quad \ldots \quad Lim\, \varphi_m(x) = a_m$$

so folgt

$$\varphi_1(x) = a_1 + \delta_1, \quad \varphi_2(x) = a_2 + \delta_2, \quad \ldots \quad \varphi_m(x) = a_m + \delta_m$$

und mithin

(2) $$\begin{aligned}&\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x) \pm \varphi_3(x) \pm \ldots \pm \varphi_m(x)\\ &= a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_m\\ &\quad + \delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3 \pm \ldots \pm \delta_m\end{aligned}$$

Nennen wir δ' die ihrem absoluten Werthe nach gröfste und δ'' die ebenso kleinste unter den Gröfsen δ_1, δ_2, ... δ_m, so ist das Aggregat

(3) $$\delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3 \pm \ldots \pm \delta_m$$

jedenfalls kleiner als

$$\delta' + \delta' + \delta' + \ldots + \delta' = m\delta'$$

und gröfser als

$$\delta'' + \delta'' + \delta'' + \ldots + \delta'' = m\delta''$$

Da nun m eine unveränderliche Zahl ist und sämmtliche δ, also auch δ' und δ'', beim Gränzenübergange verschwinden, so nähern sich $m\delta'$ und $m\delta''$, folglich auch das in (3) verzeichnete Aggregat der Gränze Null und es bleibt aus No. (2) noch übrig

(4) $$\begin{aligned}&Lim\, [\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x) \pm \varphi_3(x) \pm \ldots \pm \varphi_m(x)]\\ &= a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_m\\ &= Lim\, \varphi_1(x) \pm Lim\, \varphi_2(x) \pm Lim\, \varphi_3(x) \pm \ldots \pm Lim\, \varphi_m(x)\end{aligned}$$

Diese Gleichung zeigt, wie man den Gränzwerth einer Funktion findet, die aus einer endlichen Menge anderer Funktionen durch Additionen oder Subtraktionen zusammengesetzt ist. Es besteht aber dieses Theorem im Allgemeinen nicht mehr, wenn die Anzahl jener Bestandtheile unendlich grofs ist, denn es könnte dann sehr wohl sein, dafs die Summe $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 +$ etc., die nun aus einer unendlichen Menge abnehmender Gröfsen besteht, sich einer von Null verschiedenen Gränze näherte.

II. Die Aufgabe, den Gränzwerth eines Produktes zu finden, läfst sich leicht auf die vorige zurückführen. Aus

$$\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\varphi_3(x)\,\ldots\,\varphi_m(x)$$
$$= (a_1 + \delta_1)\,(a_2 + \delta_2)\,(a_3 + \delta_3)\,\ldots\,(a_m + \delta_m)$$

folgt nämlich, indem man beiderseits die Logarithmen nimmt,

$$log\,[\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\varphi_3(x)\,\ldots\,\varphi_m(x)]$$
$$= log\,(a_1 + \delta_1) + log\,(a_2 + \delta_2) + log\,(a_3 + \delta_3) + \ldots + log\,(a_m + \delta_m)$$

nennen wir die linke Seite $f(x)$, so ist durch Übergang zur Gränze

$$Lim\,f(x) = log\,a_1 + log\,a_2 + log\,a_3 + \ldots + log\,a_m$$
$$= log\,(a_1\,a_2\,a_3\,\ldots\,a_m)$$

mithin

$$f(x) = log\,(a_1\,a_2\,a_3\,\ldots\,a_m) + \varepsilon$$

wo ε eine Gröfse bezeichnet, welche beim Gränzenübergange verschwindet. Bezeichnen wir mit B die Basis des logarithmischen Systemes, so folgt weiter

$$B^{f(x)} = B^{log\,(a_1\,a_2\,a_3\,\ldots\,a_m) + \varepsilon}$$

oder vermöge der Bedeutung von $f(x)$

$$\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\varphi_3(x)\,\ldots\,\varphi_m(x)$$
$$= a_1\,a_2\,a_3\,\ldots\,a_m\,.\,B^\varepsilon$$

Beim Übergange zur Gränze verwandelt sich B^ε in $B^0 = 1$ und es wird jetzt

$$(5)\qquad Lim\,[\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\varphi_3(x)\,\ldots\,\varphi_m(x)]$$
$$= a_1\,a_2\,a_3\,\ldots\,a_m$$
$$= Lim\,\varphi_1(x)\,.\,Lim\,\varphi_2(x)\,.\,Lim\,\varphi_3(x)\,\ldots\,Lim\,\varphi_m(x)$$

d. h. der Gränzwerth eines Produktes ist das Produkt aus den Gränzwerthen der einzelnen Faktoren. In der Anwendung auf das im Anfange genannte Beispiel ist also

$$Lim\left(\frac{x}{1+x}\,.\,Arctan\,x\right)$$
$$= Lim\,\frac{x}{1+x}\,.\,Lim\,Arctan\,x = 1\,.\,\frac{\pi}{2}$$

Doch mufs hier wiederum bemerkt werden, dafs der in No. (5) aus-

gesprochene Satz nur für eine endliche Anzahl von Faktoren Gültigkeit besitzt.

III. Bei der Division ist die Sache ganz ähnlich; aus $Lim\, \varphi(x) = a$, $Lim\, \psi(x) = b$ folgt nämlich

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{b + \varepsilon}{a + \delta} = \frac{b}{a} + \frac{a\varepsilon - b\delta}{a(a + \delta)}$$

und durch Übergang zur Gränze

$$(6) \qquad Lim\, \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{b}{a} = \frac{Lim\, \psi(x)}{Lim\, \varphi(x)}$$

was dem Früheren völlig analog ist.

IV. Um den Gränzwerth des zusammengesetzten Ausdrucks

$$\varphi(x)^{\psi(x)} = (a + \delta)^{b+\varepsilon}$$

zu bestimmen, nehme man beiderseits die Logarithmen der Basis B; dann ist

$$log\,[\varphi(x)^{\psi(x)}] = (b + \varepsilon)\, log\,(a + \delta)$$

Bezeichnen wir die linke Seite für den Augenblick mit $f(x)$, so folgt

$$Lim\, f(x) = b\, log\, a$$

mithin

$$f(x) = b\, log\, a + \zeta$$

wo ζ eine beim Gränzenübergange verschwindende Gröſse ist. Man hat nun weiter

$$B^{f(x)} = B^{b\, log\, a} \,.\, B^{\zeta}$$

oder vermöge der Bedeutung von $f(x)$

$$\varphi(x)^{\psi(x)} = a^b \,.\, B^{\zeta}$$

und hieraus folgt durch Übergang zur Gränze

$$(7) \qquad Lim\, [\varphi(x)^{\psi(x)}] = a^b = [Lim\, \varphi(x)]^{Lim\, \psi(x)}$$

V. Sehr häufig benutzt man zu Gränzbestimmungen folgenden Satz: wenn die Funktion $f(x)$ zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ liegt, also die Ungleichung

$$\varphi(x) > f(x) > \psi(x)$$

statt findet und sich $\varphi(x)$ sowohl als $\psi(x)$ einer und derselben Gränze k nähert, so ist auch $Lim\, f(x) = k$.

Dieſs folgt leicht aus der Bemerkung, daſs eine zwischen A und B liegende Zahl M, $(A > M > B)$ jederzeit unter der Form

$$M = B + \varrho\,(A - B)$$

dargestellt werden kann, wo ϱ einen positiven ächten Bruch bezeichnet. Man kann daher auch

$$f(x) = \psi(x) + \varrho\,[\varphi(x) - \psi(x)].$$

setzen und es folgt nun durch Übergang zur Gränze, wegen $Lim\, \varphi(x) = k$ und $Lim\, \psi(x) = k$,

$$Lim\, f(x) = k$$

wie behauptet wurde. Beispiele hierzu wird man in dem nächsten Paragraphen finden.

§. 8.

Gränzbestimmungen an Potenzen, Exponenzialgröfsen und Logarithmen.

Um von den allgemeinen Theoremen, welche wir im vorigen Paragraphen entwickelt haben, einige brauchbare Anwendungen zu zeigen, geben wir eine Reihe von Gränzbestimmungen, die uns späterhin von Nutzen sein werden und die auch in den höheren Theilen der Mathematik eine wichtige Rolle spielen.

I. Aus dem bekannten Satze

$$\frac{a^m - 1}{a - 1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{m-1}$$

folgt für $a = 1 + \delta$,

$$\frac{(1+\delta)^m - 1}{\delta}$$

$$= 1 + (1+\delta) + (1+\delta)^2 + (1+\delta)^3 + \ldots + (1+\delta)^{m-1}$$

Setzen wir δ als eine positive Gröfse voraus, so ist rechter Hand jeder Summand gröfser als sein Vorgänger, also 1 der kleinste und $(1+\delta)^{m-1}$ der gröfste Summand. Lassen wir daher erst 1 und dann $(1+\delta)^{m-1}$ an die Stelle jedes einzelnen Summanden treten, so kommt auf der rechten Seite im ersten Falle zu wenig, im zweiten zu viel heraus, und es ist also, weil m Summanden vorhanden sind,

$$(1) \qquad \frac{(1+\delta)^m - 1}{\delta} > m \,.\, 1$$

$$(2) \qquad \frac{(1+\delta)^m - 1}{\delta} < m \,.\, (1+\delta)^{m-1}$$

oder bei übersichtlicherer Schreibart

$$m(1+\delta)^{m-1} > \frac{(1+\delta)^m - 1}{\delta} > m.$$

Lassen wir δ in Null übergehen, so nähern sich die äufsersten Glieder $m(1+\delta)^{m-1}$ und m der gemeinschaftlichen Gränze m und es folgt jetzt nach No. V. des vorigen Paragraphen

$$(3) \qquad Lim\, \frac{(1+\delta)^m - 1}{\delta} = m$$

Dieser interessante Satz läfst sich leicht auf den Fall ausdehnen, wo der Exponent m keine ganze positive Zahl ist. Zu diesem Zwecke schreiben

wir in No. (1) und (2) α für δ und geben jenen Ungleichungen die Form

(4) $$(1+\alpha)^m > 1 + m\alpha$$
$$(1+\alpha)^m < 1 + m\alpha\,(1+\alpha)^{m-1}$$

da $(1+\alpha)^{m-1} < (1+\alpha)^m$ ist, so kann man statt der zweiten Ungleichung die stärkere setzen

$$(1+\alpha)^m < 1 + m\alpha\,(1+\alpha)^m$$

Diese ist besonders in dem Falle brauchbar, wo $m\alpha$ weniger als die Einheit beträgt; man findet unter dieser Voraussetzung, indem man $(1+\alpha)^m$ als Unbekannte behandelt,

(5) $$(1+\alpha)^m < \frac{1}{1-m\alpha}, \quad m\alpha < 1.$$

In No. (4) setzen wir jetzt $\alpha = \frac{1}{m}\beta$ und ziehen beiderseits die $m$te Wurzel; so wird

$$1 + \frac{1}{m}\beta > (1+\beta)^{\frac{1}{m}}$$

in No. (4) nehmen wir $\alpha = \frac{1}{m}\frac{\beta}{\beta+1}$ und ziehen ebenfalls die $m$te Wurzel, so ist für jedes positive β

$$1 + \frac{1}{m}\frac{\beta}{\beta+1} < (1+\beta)^{\frac{1}{m}}$$

In den beiden so gewonnenen Ungleichungen schreiben wir q für m, also bei umgekehrter Stellung

$$(1+\beta)^{\frac{1}{q}} > 1 + \frac{1}{q}\frac{\beta}{\beta+1}$$
$$(1+\beta)^{\frac{1}{q}} < 1 + \frac{1}{q}\beta$$

erheben beiderseits auf die $p$te Potenz und benutzen zugleich die in No. (4) und (5) verzeichneten Beziehungen wieder; es ist dann

$$(1+\beta)^{\frac{p}{q}} > \left(1 + \frac{1}{q}\frac{\beta}{\beta+1}\right)^p > 1 + \frac{p}{q}\frac{\beta}{\beta+1}$$
$$(1+\beta)^{\frac{p}{q}} < \left(1 + \frac{1}{q}\beta\right)^p < \frac{1}{1-\frac{p}{q}\beta}$$

wobei aber in der zweiten Ungleichung $\frac{p}{q}\beta < 1$ sein mufs. Da man sich irrationalen Zahlen durch rationale Brüche (Dezimalbrüche) bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit nähern kann, so müssen die obigen Beziehungen für irrationale Zahlen ebenfalls gelten, weil sie nie auf-

hören richtig zu sein, während man den Bruch $\frac{p}{q}$ näher und näher an die Irrationalzahl herankommen läfst. Setzen wir also μ für $\frac{p}{q}$, so ist für jedes positive (irrationale oder rationale) μ

$$(6) \qquad (1+\beta)^\mu > 1 + \mu \frac{\beta}{1+\beta}$$

$$(7) \qquad (1+\beta)^\mu < 1 + \mu \frac{\beta}{1-\mu\beta}, \quad \mu\beta < 1$$

wobei die rechte Seite der zweiten Ungleichung mit dem früheren $\frac{1}{1-\mu\beta}$ einerlei ist. Aus diesen Ungleichungen findet man sogleich für $\mu\delta < 1$

$$\frac{\mu}{1-\mu\delta} > \frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} > \frac{\mu}{1+\delta}$$

und folglich für $\delta = 0$, wo nun der Bedingung $\mu\delta < 1$ jedenfalls genügt ist,

$$(8) \qquad Lim \frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} = \mu$$

und diefs gilt für jedes beliebige positive μ. Wäre endlich der Exponent von $1+\delta$ negativ, etwa $= -\lambda$, so ist

$$\frac{(1+\delta)^{-\lambda} - 1}{\delta} = \frac{1-(1+\delta)^\lambda}{\delta(1+\delta)^\lambda}$$

$$= -\frac{(1+\delta)^\lambda - 1}{\delta} \cdot \frac{1}{(1+\delta)^\lambda}$$

Von den beiden auf der rechten Seite stehenden Faktoren nähert sich der erste der Gränze λ, weil λ an sich positiv ist, und der zweite der Gränze 1; man hat daher

$$Lim \frac{(1+\delta)^{(-\lambda)} - 1}{\delta} = (-\lambda)$$

Fassen wir diesen Satz mit dem in No. (8) verzeichneten zusammen, so ist nunmehr für jedes von Null verschiedene μ

$$(9) \qquad Lim \frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} = \mu$$

Hieraus folgt z. B., dafs für sehr kleine δ näherungsweis die Gleichung

$$\frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} = \mu$$

oder

$$(1+\delta)^\mu = 1 + \mu\delta$$

statt finden mufs, und diefs liefse sich in manchen Fällen recht gut be-

nutzen. Um z. B. aus 1001 die Cubikwurzel zu ziehen, kann man setzen

$$(1001)^{\frac{1}{3}} = \left[1000 \cdot \left(1 + \frac{1}{1000}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$
$$= 10 \cdot \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}$$

also näherungsweis

$$\sqrt[3]{1001} = 10\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1000}\right) = 10{,}003333\ldots$$

was in der That auf fünf Dezimalstellen mit der Cubikwurzel aus 1001 übereinstimmt.

II. Multiplizirt man die für jedes positive μ geltende Ungleichung (6) mit $1 + \beta$, so folgt

$$(1 + \beta)^{\mu+1} > 1 + (\mu + 1)\beta$$

oder für $\mu + 1 = \lambda$, wo λ eine die Einheit übersteigende Zahl bedeutet,

$$(1 + \beta)^{\lambda} > 1 + \lambda\beta$$

und hierin haben wir eine Erweiterung des in No. (4) entwickelten Satzes, in so fern hier der Exponent keine ganze positive Zahl, sondern nur überhaupt > 1 zu sein braucht. Setzen wir $\beta = \frac{1}{\lambda\varrho}$ und erheben beiderseits auf die Potenz ϱ, so folgt die Ungleichung

$$(10)\qquad \left(1 + \frac{1}{\lambda\varrho}\right)^{\lambda\varrho} > \left(1 + \frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho}$$

deren Sinn sehr leicht einzusehen ist. Weil nämlich $\lambda > 1$, so ist $\lambda\varrho > \varrho$ und da aufserdem λ beliebig bleibt, so kann $\lambda\varrho$ jede Zahl τ bedeuten, die mehr als ϱ beträgt; d. h. also: für $\tau > \varrho$ ist immer

$$\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)^{\tau} > \left(1 + \frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho}$$

Hieraus geht hervor, dafs der Ausdruck

$$\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$$

fortwährend zunimmt, wenn ω ins Unendliche wächst. — Diese Zunahme geht jedoch nicht ins Unendliche fort, denn setzen wir in No. (7) oder

$$(1 + \beta)^{\mu} < \frac{1}{1 - \mu\beta}, \quad \mu\beta < 1$$

$\beta = \frac{1}{\mu\varrho}$ und erheben beiderseits auf die ϱte Potenz, so folgt für $\frac{1}{\varrho} < 1$ oder $\varrho > 1$

(11) $$\left(1+\frac{1}{\mu\varrho}\right)^{\mu\varrho} < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho}}, \quad \varrho > 1$$

und hier zeigt schon der einfache Fall $\varrho = 2$, dafs der Ausdruck linker Hand nicht unendlich werden kann. Aus diesen Bemerkungen zusammen folgt nothwendig, dafs der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ sich für unendlich wachsende ω einer bestimmten endlichen Gränze nähern mufs und zwar ist dieselbe gröfser als irgend eine der fortwährend wachsenden Zahlen

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \quad \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, \quad \ldots\ldots$$

dagegen kleiner als irgend eine der (fortwährend abnehmenden) Zahlen

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}, \quad \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}, \quad \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^4}, \quad \ldots\ldots$$

Berechnet man also zwei Potenzen von den Formen

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

und

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

so liegt der Gränzwerth von $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ immer zwischen ihnen und läfst sich hiernach mit beliebiger Genauigkeit ermitteln; so ist für $n = 1000$,

$$\left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} = 2{,}717\ldots; \quad \left(\frac{1000}{999}\right)^{1000} = 2{,}719\ldots$$

und folglich wenn man das arithmetische Mittel nimmt

$$Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right] = 2{,}718\ldots$$

wobei die zwei ersten Dezimalen entschieden richtig sind. Für diesen Gränzwerth 2,718 ... hat man den Buchstaben e eingeführt, so dafs also e in der Analysis ebenso ausschliefslich die Zahl 2,718 .... bezeichnet, wie π die Ludolphsche Zahl; wir haben daher

(12) $$Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right] = e.$$

Wollte man allgemeiner den Gränzwerth von

$$\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega}$$

bestimmen, wo z eine beliebige Zahl bezeichnet, so gebe man dem Ausdrucke die Form

$$\left(1+\frac{1}{\frac{\omega}{z}}\right)^{\omega}$$

und berücksichtige, dafs nun $\frac{\omega}{z}$ ganz ebenso eine unendlich wachsende Zahl ist, wie früher ω; setzt man daher $\frac{\omega}{z}=\omega'$, so wird

$$\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega}=\left(1+\frac{1}{\omega'}\right)^{\omega' z}=\left[\left(1+\frac{1}{\omega'}\right)^{\omega'}\right]^{z}$$

und hieraus ergiebt sich für unendlich wachsende ω und ω'

(13)*) $$Lim\left[\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega}\right]=e^{z}.$$

III. Betrachten wir noch den Ausdruck

$$\frac{a^{\delta}-1}{\delta}$$

Je kleiner hier δ wird, desto weniger ist a^{δ} von der Einheit verschieden und wir können daher

*) Es läfst sich dieser Formel eine sehr anschauliche Seite abgewinnen, wenn man die Lehre von den zusammengesetzten Interessen damit verknüpft. Bezeichnen wir nämlich mit z die Zinsen von einem Thaler auf ein Jahr, so ist bei einfachen Interessen das Kapital 1 in einem Jahre auf $1+z$ angewachsen. Werden dagegen die Interessen in Terminen von $\frac{1}{m}$ Jahr zum Kapital geschlagen und mitverzinst, so ist der Werth des Kapitales 1 am Ende des ersten $m$tel Jahres $=1+\frac{z}{m}$, am Ende des zweiten $m$tels $=\left(1+\frac{z}{m}\right)^{2}$, am Ende des dritten $m$tels $=\left(1+\frac{z}{m}\right)^{3}$ u. s. f., am Ende des ganzen aus m gleichen Theilen bestehenden Jahres also

$$=\left(1+\frac{z}{m}\right)^{m}.$$

Läfst man nun m beständig wachsen, so werden der einzelnen Termine immer mehr und die Zeiten zwischen ihnen immer kleiner, und geht man zur Gränze für unendlich wachsende m über, so giebt jetzt

$$Lim\left\{\left(1+\frac{z}{m}\right)^{m}\right\}=e^{z}$$

denjenigen Werth des Kapitales an, welcher entsteht, wenn stetig nach einander die in jedem Augenblicke gewonnenen Interessen sogleich zum Kapitale geschlagen und mitverzinst werden. Man kann daher sagen: eine Gröfse, welche in einer gewissen Zeit bei einfachen Wachsthum von 1 bis $1+z$ zunimmt, wächst in derselben Zeit auf e^{z} an, wenn das Wachsthum so geschieht, dafs in stetiger Folge jeder bereits erzeugte Theil gleichmäfsig wieder neue Theile erzeugen hilft. Das Erste entspräche etwa einer unorganischen Anhäufung, das Zweite einem organischen Prozesse.

$$a^\delta = 1 + \frac{1}{\omega}$$

setzen, wo ω eine Gröfse bezeichnet, die unendlich wächst, wenn δ sich der Gränze Null nähert. Aus der vorstehenden Gleichung folgt aber

$$\delta = {}^a\!log\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)$$

und mithin durch Substitution der für a^δ und δ gefundenen Ausdrücke

$$\frac{a^\delta - 1}{\delta} = \frac{\frac{1}{\omega}}{{}^a\!log\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)} = \frac{1}{{}^a\!log\left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega\right]}$$

für verschwindende δ, also unendlich wachsende ω wird hieraus

$$(14) \qquad Lim\, \frac{a^\delta - 1}{\delta} = \frac{1}{{}^a\!log\, e}$$

Man kann dieser Gleichung noch eine bessere Form ertheilen, wenn man sich die Zahl e als Grundzahl eines logarithmischen Systemes denkt; bezeichnen wir die Logarithmen dieses Systemes, welche man natürliche genannt hat, mit einem blofsen l, so wäre

$$e^{la} = a$$

und folglich, wenn man beiderseits die künstlichen Logarithmen des Systemes a nimmt,

$$la\,.\,{}^a\!log\, e = {}^a\!log\, a = 1$$

oder umgekehrt

$$\frac{1}{{}^a\!log\, e} = la$$

Hierdurch nimmt die Gleichung (14) die elegante Form an

$$(15) \qquad Lim\, \frac{a^\delta - 1}{\delta} = la$$

In den Gleichungen (13) und (15) spricht sich das interessante Resultat aus, dafs man die natürliche Exponenzialgröfse e^x und ebenso den natürlichen Logarithmus einer Zahl als gewisse Gränzfälle der Potenz ansehen kann, und es wird also mittelst jener Formeln ein Zusammenhang zwischen diesen verschiedenen Funktionen aufgeschlossen.

§. 9.

Gränzwerthe bei goniometrischen und cyklometrischen Funktionen.

I. Der Sinus irgend eines spitzen Bogens δ ist offenbar immer kleiner als der Bogen, die Tangente aber gröfser als letzterer und man hat daher

$$tan\,\delta > \delta > sin\,\delta$$

woraus man umgekehrt schliefst:

$$\cot\delta < \frac{1}{\delta} < \frac{1}{\sin\delta}$$

Multiplizirt man diese Ungleichung mit $\sin\delta$, so folgt

$$\cos\delta < \frac{\sin\delta}{\delta} < 1$$

und es läfst sich diese Ungleichung benutzen, um daraus die Gränze zu bestimmen, welcher sich der Quotient $\frac{\sin\delta}{\delta}$ nähert, wenn δ in Null übergeht; man erhält nämlich zufolge des in No. V. des §. 7. erörterten Prinzipes

(1) $$Lim\,\frac{\sin\delta}{\delta} = 1$$

Wäre allgemeiner der Gränzwerth von $\frac{\sin\alpha\delta}{\delta}$ zu bestimmen, wo α eine constante Gröfse bezeichnet, so bedarf es nur der Bemerkung, dafs $\alpha\delta$ mit δ gleichzeitig bis zur Null abnimmt; setzt man daher $\alpha\delta = \delta'$, also

$$\frac{\sin\alpha\delta}{\delta} = \alpha\,\frac{\sin\delta'}{\delta'}$$

so ist δ' eine ebenso wie δ verschwindende Gröfse und man hat daher

(2) $$Lim\,\frac{\sin\alpha\delta}{\delta} = \alpha$$

Aus diesem Theoreme läfst sich wiederum die Gränze ableiten, der sich $\frac{\tan\alpha\delta}{\delta}$ nähert; es ist nämlich

$$\frac{\tan\alpha\delta}{\delta} = \frac{\sin\alpha\delta}{\delta}\cdot\frac{1}{\cos\alpha\delta}$$

und hier geht für $\delta = 0$ der erste Faktor rechter Hand in α, der zweite in 1 über, so dafs man erhält

(3) $$Lim\,\frac{\tan\alpha\delta}{\delta} = \alpha.$$

II. Kehrt man die hier gefundenen Beziehungen um, so erhält man Formeln, welche zwar der Sache nach von den obigen nicht verschieden sind, aber sich formell in so fern unterscheiden, als in ihnen nicht goniometrische, sondern cyklometrische Funktionen vorkommen. Setzen wir nämlich $\sin\delta = \vartheta$, so folgt, weil δ als spitzer Bogen angenommen wurde, umgekehrt $\delta = Arcsin\,\vartheta$, mithin

$$\frac{\sin\delta}{\delta} = \frac{\vartheta}{Arcsin\,\vartheta}$$

oder umgekehrt

$$\frac{Arcsin\,\vartheta}{\vartheta} = \frac{1}{\frac{sin\,\delta}{\delta}}$$

Wenn nun δ in Null übergeht, so verschwindet auch ϑ und man hat daher

(4) $$Lim\,\frac{Arcsin\,\vartheta}{\vartheta} = 1$$

wo sich das Zeichen *Lim* auf das Verschwinden von ϑ bezieht.

In ähnlicher Weise folgt aus $tan\,\delta = \vartheta$, umgekehrt $\delta = Arctan\,\vartheta$, mithin

$$\frac{tan\,\delta}{\delta} = \frac{\vartheta}{Arctan\,\vartheta}$$

oder

$$\frac{Arctan\,\vartheta}{\vartheta} = \frac{1}{\frac{tan\,\delta}{\delta}}$$

folglich durch Übergang zur Gränze für verschwindende δ, wo nun auch ϑ verschwindet,

(5) $$Lim\,\frac{Arctan\,\vartheta}{\vartheta} = 1.$$

III. Um die Transformationen, welche zur Ermittelung eines Gränzwerthes dienen, an einem etwas gröfseren Beispiele zeigen zu können, wollen wir noch die Frage beantworten, welcher Gränze sich der Ausdruck

$$\left(cos\,\frac{\alpha}{m} + i\,sin\,\frac{\alpha}{m}\right)^m$$

nähert, wenn man die Zahl m ins Unendliche wachsen läfst.

Wir geben dem vorstehenden Ausdrucke zunächst dadurch eine andere Form, dafs wir die Gröfse $\frac{\alpha}{m}$, welche sich für unendlich wachsende m der Gränze Null nähert, mit einem einzigen Buchstaben δ bezeichnen, also $\frac{\alpha}{m} = \delta$ und umgekehrt $m = \frac{\alpha}{\delta}$ setzen; es ist dann

$$\left(cos\,\frac{\alpha}{m} + i\,sin\,\frac{\alpha}{m}\right)^m = (cos\,\delta + i\,sin\,\delta)^{\frac{\alpha}{\delta}}$$

(6) $$= (cos\,\delta)^{\frac{\alpha}{\delta}}(1 + i\,tan\,\delta)^{\frac{\alpha}{\delta}} = (1 - sin^2\delta)^{\frac{\alpha}{2\delta}}(1 + i\,tan\,\delta)^{\frac{\alpha}{\delta}}$$

und nun untersuchen wir jeden Faktor für sich. Was den ersten Faktor betrifft, so ist offenbar

$$(1 - sin^2\delta)^{\frac{\alpha}{2\delta}} = \left[(1 - sin^2\delta)^{\frac{1}{sin^2\delta}}\right]^{\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{sin\,\delta}{\delta}\cdot sin\,\delta}$$

und da $sin^2\,\delta$ mit δ gleichzeitig verschwindet, so können wir $sin^2\,\delta = \frac{1}{\omega}$

setzen, wenn wir unter ω eine unendlich wachsende Zahl verstehen; so ist

$$(1 - \sin^2 \delta)^{\frac{\alpha}{2\delta}} = \left[\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]^{\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin \delta}{\delta} \cdot \sin \delta}$$

Durch Übergang zur Gränze für unendlich wachsende ω und verschwindende δ folgt hieraus nach No. (13) des vorigen Paragraphen (für $z = -1$) und nach No. (1)

(7) $$Lim \left\{(1 - \sin^2 \delta)^{\frac{\alpha}{2\delta}}\right\} = [e^{-1}]^{\frac{\alpha}{2} \cdot 1 \cdot 0} = e^0 = 1.$$

Um ferner den Gränzwerth des zweiten auf der rechten Seite von No. (6) vorkommenden Faktors zu bestimmen, setzen wir

$$(1 + i \tan \delta)^{\frac{\alpha}{\delta}} = \left[(1 + i \tan \delta)^{\frac{1}{i \tan \delta}}\right]^{\frac{\tan \delta}{\delta} \cdot \alpha i}$$

und da $i \tan \delta$ mit δ gleichzeitig verschwindet, so können wir $\frac{1}{\omega}$ statt $i \tan \delta$ setzen, wo ω eine unendlich wachsende Zahl bezeichnet; so ist dann

$$(1 + i \tan \delta)^{\frac{\alpha}{\delta}} = \left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]^{\frac{\tan \delta}{\delta} \cdot \alpha i}$$

und hieraus ergiebt sich durch Übergang zur Gränze für unendlich wachsende ω und verschwindende δ.

(8) $$Lim \left\{(1 + i \tan \delta)^{\frac{\alpha}{\delta}}\right\} = e^{1 \cdot \alpha i}$$

Benutzen wir endlich die in (7) und (8) verzeichneten Ergebnisse, so folgt aus der Gleichung (6) für unendlich wachsende m

(9) $$Lim \left[\left(\cos \frac{\alpha}{m} + i \sin \frac{\alpha}{m}\right)^m\right] = e^{\alpha i}$$

ein Resultat, auf welches wir später zurückkommen werden.

Capitel III.

Die Continuität und Discontinuität der Funktionen.

§. 10.

Begriff und Kennzeichen der Discontinuität der Funktionen.

Die unabhängige Variabele einer Funktion wird zufolge des in §. 1. Gesagten jederzeit als eine stetig veränderliche Zahl angesehen, bei welcher also der Übergang von einem individuellen Werthe zum anderen nur

vermittelst des Durchganges durch alle möglichen Zwischenstufen erfolgen kann. Bezeichnen wir den Werth der Funktion mit einem neuen Buchstaben, setzen also etwa $f(x) = y$, so ist letzterer die abhängige Variabele und es entsteht nun die Frage, ob auch diese Gröfse sich stetig ändert oder nicht. Um vorerst den Sinn dieser Frage etwas näher zu beleuchten, denken wir uns die Sache geometrisch und zwar x als Abscisse, y als Ordinate einer Curve.

Die in Fig. 4 verzeichnete Curve PRQ verlaufe stetig von P bis Q, so ist hier auch die Ordinate eine continuirliche Funktion der Abscisse; denn construirt man irgend eine Gerade, deren Länge zwischen den beiden Ordinaten $AP = OP'$ und $BQ = OQ'$ enthalten ist, d. h. nimmt man OR' willkührlich, so dafs $OQ' > OR' > OP'$ ausfällt, und zieht eine Parallele zur Achse der x in der Entfernung OR', so schneidet diese nothwendig die Curve PQ in einem Punkte R zwischen P und Q; da nun $MR \# OR'$ ist, so erscheint jene willkührlich eingelegte Zwischenstufe OR' auch als Ordinate der Curve, oder mit anderen Worten, indem sich die Ordinate von AP bis BQ änderte, hat sie unterwegs auch den beliebigen Zwischenwerth MR angenommen. Da diefs von jeder zwischen AP und BQ eingelegten Zwischenstufe gilt, so hat sich in diesem Falle die Ordinate stetig geändert. — Anders gestaltet sich die Sache, wenn die Curve von P bis Q unstetig verläuft, wie in Fig. 5, wo die krumme Linie bei U plötzlich abbricht und bei V ihren Lauf fortsetzt. Hier giebt es ganze Reihen von Linien zwischen $AP = OP'$ und $BQ = OQ'$, welche nicht als Ordinaten der Curven erscheinen, so ist z. B. OR' zwischen OP' und OQ' enthalten, aber es kommt unter den Ordinaten der Curve keine vor, welche $= OR'$ wäre; die Parallele RR' schneidet in diesem Falle die krumme Linie nicht. Da nun hier nicht alle zwischen AP und BQ liegenden Zwischenstufen durchlaufen worden sind, so hat sich die Ordinate unstetig geändert.

Es würde sich jetzt darum handeln, ein analytisches Kennzeichen für die Continuität und Discontinuität der Funktionen aufzufinden. Dazu führt eine vergleichende Betrachtung der vorigen Figuren.

Bezeichnen wir mit $OM = \xi$ einen individuellen Werth der Abscisse x, so können wir uns die zu ξ gehörende Ordinate $f(\xi)$ auf doppelte Weise entstanden denken, entweder dadurch, dafs sich eine der früheren Ordinaten, etwa AP, vorwärts bewegt hat, bis ihr Fufspunkt nach M kam, oder dadurch, dafs eine spätere Ordinate BQ auf gleiche Weise rückwärts geschritten ist. Bei einer continuirlichen Curve gelangt man in beiden Fällen zu derselben Ordinate MR, oder was Dasselbe ist, die Differenz QS zwischen den beiden Nachbarordinaten BQ und AP nähert

sich der Gränze Null, wenn OA und OB in OM übergehen. Setzen wir $MB = \delta$, $MA = \varepsilon$, so ist $BQ = f(\xi + \delta)$, $AP = f(\xi - \varepsilon)$ und mithin

(1) $$Lim\ [f(\xi + \delta) - f(\xi - \varepsilon)] = 0$$

wobei das Zeichen *Lim* bedeutet, dafs die beliebigen Gröfsen δ und ε in Null übergehen sollen.

Behalten wir die obige Bezeichnung auch für den Fall einer discontinuirlichen Curve bei, so gestaltet sich die Sache wie folgt. Lassen wir $MA = \varepsilon$ zu Null werden, so geht die Ordinate $AP = f(\xi - \varepsilon)$ in MU über und es bildet diese Ordinate den Schlufs der bisherigen Reihe von Ordinaten; wird ferner $MB = \delta$ zu Null, so verwandelt sich $BQ = f(\xi + \delta)$ in MV und diese Ordinate bildet den Anfang einer neuen Reihe von Ordinaten. Es gehören also zu einer und derselben Abscisse ξ plötzlich zwei verschiedene Ordinaten, während bisher jeder Abscisse nur eine einzige Ordinate entsprach, und man kann jene zwei Ordinaten sehr passend durch $MU = f(\xi - 0)$ und $MV = f(\xi + 0)$ unterscheiden. Zugleich nähert sich die Differenz $BQ - AP$ nicht mehr der Null, sondern der endlichen Gröfse UV, also

(2) $$Lim\ [f(\xi + \delta) - f(\xi - \varepsilon)] \gtrless 0$$

Aus diesen Betrachtungen fliefst nun unmittelbar folgende Regel:

> Um eine gegebene Funktion $f(x)$ auf ihre Continuität zu prüfen, untersuche man die Differenz
> $$f(x + \delta) - f(x - \varepsilon)$$
> Nähert sich dieselbe bei unendlich abnehmenden δ und ε jederzeit der Null, so ist die Funktion eine durchaus continuirliche; giebt es aber einen oder mehrere individuelle Werthe von x, für welche jene Differenz sich nicht der Null nähert, so ist die Funktion eine discontinuirliche und zwar findet für jeden solchen speziellen Werth von x eine Unterbrechung der Continuität statt.

Den Mechanismus der Rechnung wird man aus den folgenden Beispielen ersehen.

1. Für $f(x) = kx^2$, wo k irgend einen constanten Faktor bezeichnet, erhält man

$$\begin{aligned} f(x + \delta) - f(x - \varepsilon) &= k(x + \delta)^2 - k(x - \varepsilon)^2 \\ &= k[2x(\delta + \varepsilon) + \delta^2 - \varepsilon^2] \end{aligned}$$

und wenn nun δ und ε in Null übergehen, so wird auch $\delta + \varepsilon$ und ebenso $\delta^2 - \varepsilon^2$ gleich Null und man kann die rechte Seite der obigen Gleichung der Null so nahe bringen, als man will, wenn man $\delta + \varepsilon$ hinreichend klein nimmt. Da diefs für jeden individuellen Werth von x gilt, so verläuft die Funktion kx^2 durchaus stetig.

2. Als zweites Beispiel nehmen wir

$$f(x) = \frac{1}{x - a}$$

Hier ist die in Betrachtung zu ziehende Differenz

$$f(x + \delta) - f(x - \varepsilon) = \frac{1}{x + \delta - a} - \frac{1}{x - \varepsilon - a}$$

und diese nähert sich allerdings der Gränze Null, sobald x von a verschieden ist. Für $x = a$ dagegen würde obige Differenz in eine Summe übergehen, nämlich

$$f(a + \delta) - f(a - \varepsilon) = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\varepsilon}$$

und daraus folgt

$$Lim\ [f(a + \delta) - f(a - \varepsilon)] = \infty.$$

Die Funktion $\frac{1}{x - a}$ erleidet demnach eine einzige Unterbrechung der Stetigkeit, in so fern sie an der Stelle $x = a$ aus $+ \infty$ nach $- \infty$ überspringt. Diefs bestätigt sich auch geometrisch; die Curve, deren Gleichung

$$y = \frac{1}{x - a}$$

lautet, ist nämlich eine gleichseitige Hyperbel, deren eine Asymptote zur Abscissenachse genommen ist; eine Darstellung giebt Fig. 6, worin O der Anfangspunkt der Coordinaten, OX, OY die Coordinatenachsen bezeichnen und $OA = a$ ist.

3. Man kann überhaupt das allgemeinere Theorem aufstellen, dafs jede gebrochene Funktion von der Form

$$f(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$$

eine Unterbrechung der Continuität erleidet, sobald es einen oder mehrere spezielle Werthe von x giebt, für welche $\varphi(x)$ verschwindet und zugleich aus dem Positiven ins Negative oder umgekehrt übergeht. Ist nämlich für den speziellen Werth $x = a$, $\varphi(a) = 0$ dagegen $\varphi(a - \varepsilon)$ positiv und $\varphi(a + \delta)$ negativ, so kann man $\varphi(a - \varepsilon) = + \varkappa$ und $\varphi(a + \delta) = - \lambda$ setzen, wo $\varkappa$ und λ mit ε und δ gleichzeitig verschwinden; es ist dann

$$f(a + \delta) - f(a - \varepsilon) = \frac{1}{-\lambda} - \frac{1}{+\varkappa} = -\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\varkappa}\right)$$

und hieraus folgt

$$Lim\ \{f(a + \delta) - f(a - \varepsilon)\} = - \infty$$

Wäre dagegen $\varphi(a - \varepsilon)$ negativ, etwa $= - \varkappa$, und $\varphi(a + \delta)$ positiv $= + \lambda$, so dafs ein Übergang aus dem Negativen ins Positive statt fände, so würde

$$f(a+\delta)-f(a=\varepsilon)=\frac{1}{+\lambda}-\frac{1}{-\varkappa}=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\varkappa}$$

werden und diefs giebt

$$Lim\,\{f(a+\delta)-f(a-\varepsilon)\}=+\infty$$

In jedem dieser Fälle findet also für $x=a$ eine Unterbrechung der Continuität statt. Vermöge dieser Bemerkung erkennt man z. B. sogleich, dafs die Funktion

$$sec\,x=\frac{1}{cos\,x}$$

an den Stellen $x=\pm\frac{1}{2}\pi,\ \pm\frac{3}{2}\pi,\ \pm\frac{5}{2}\pi$ etc. discontinuirlich wird, weil hier der Nenner $cos\,x$ jedesmal durch Null hindurchgeht und sein Vorzeichen wechselt.

4. Die bisher betrachteten unstetigen Funktionen hatten sämmtlich die Eigenthümlichkeit, aus $+\infty$ nach $-\infty$ oder umgekehrt aus $-\infty$ nach $+\infty$ überzuspringen, d. h. besser ausgedrückt, an der Stelle $x=\xi$, an welcher die Discontinuität eintrat, waren die beiden Werthe $f(\xi-0)$ und $f(\xi+0)$ zugleich unendlich und von entgegengesetzten Vorzeichen. Dafs es aber auch Funktionen giebt, welche von einem endlichen Werthe zum anderen überspringen, möge das nächste Beispiel zeigen. Sei

$$f(x)=\frac{k+h}{2}+\frac{k-h}{\pi}\,Arctan\,\frac{a}{x-a}$$

nehmen wir x erst kleiner als a, etwa $x=a-\varepsilon$, so folgt

$$f(a-\varepsilon)=\frac{k+h}{2}+\frac{k-h}{\pi}\,Arctan\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)$$

d. h. weil immer $Arctan\,(-z)=-Arctan\,z$ ist

$$f(a-\varepsilon)=\frac{k+h}{2}-\frac{k-h}{\pi}\,Arctan\,\frac{a}{\varepsilon}$$

und hieraus ergiebt sich, wenn ε in Null, also $Arctan\,\frac{1}{\varepsilon}$ in $Arctan\,\infty$ $=\frac{\pi}{2}$, übergeht.

$$f(a-0)=\frac{k+h}{2}-\frac{k-h}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=h$$

Nehmen wir dagegen $x>a$, etwa $x=a+\delta$, so wird

$$f(a+\delta)=\frac{k+h}{2}+\frac{k-h}{\pi}\,Arctan\,\frac{a}{\delta}$$

und durch Übergang zur Gränze für verschwindende δ

$$f(a+0)=\frac{k+h}{2}+\frac{k-h}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=k$$

Die in Rede stehende Funktion springt also an der Stelle $x=a$ aus

$f(a-0)=h$ nach $f(a+0)=k$ über. Fig. 7 giebt eine Zeichnung der durch die Gleichung

$$y=\frac{k+h}{2}+\frac{k-h}{\pi}\,Arctan\,\frac{a}{x-a}$$

charakterisirten Curve; es ist darin $OA=a$, $AH=h$, $AK=k$, ferner gehört zur Abscisse $x=0$ die Ordinate $OB=\frac{1}{2}(k+h)-\frac{1}{4}(k-h)$ und zur Abscisse $OA'=2a$ die Ordinate $A'C=\frac{1}{2}(k+h)+\frac{1}{4}(k-h)$. Überhaupt sind die beiden rechts und links von AK liegenden Zweige der Curve congruent und besitzen eine gemeinschaftliche Asymptote, welche in der Entfernung $AL=\frac{1}{2}(h+k)$ parallel zur Abscissenachse liegt.

§. 11.

Zweites Kennzeichen der Discontinuität. Allgemeine Theoreme.

In dem vorigen Paragraphen verglichen wir die beiden Werthe $f(\xi-0)$ und $f(\xi+0)$, welche die Funktion bei einer Stetigkeitsunterbrechung erhält, durch Subtraktion, in so fern nämlich die Differenz $f(\xi+\delta)-f(\xi-\varepsilon)$ untersucht wurde; man kann aber diese Vergleichung ebenso durch Division vornehmen, indem man den Quotienten $\frac{f(x+\delta)}{f(x-\varepsilon)}$ in Rechnung zieht. Nähert sich dieser Quotient für verschwindende δ und ε jederzeit der Gränze 1, so ist immer $f(x-0)=f(x+0)$, also die Funktion continuirlich, giebt es dagegen Werthe von x, z. B. $x=\xi$, für welche der Gränzwerth jenes Quotienten von der Einheit verschieden ausfällt, so ist dann $f(\xi-0)$ von $f(\xi+0)$ verschieden und mithin die Funktion an der Stelle $x=\xi$ discontinuirlich.

Die hierin liegende Regel zur Prüfung der Continuität gegebener Funktionen läfst eine nicht minder leichte Anwendung zu, als die früher gegebene. So ist z. B. für $f(x)=\frac{1}{x-a}$,

$$\frac{f(x+\delta)}{f(x-\varepsilon)}=\frac{x-a-\varepsilon}{x-a+\delta}$$

und der Gränzwerth hiervon wird entschieden $=1$, sobald x von a verschieden ist; für $x=a$ dagegen hat man

$$Lim\,\frac{f(a+\delta)}{f(a-\varepsilon)}=Lim\,\frac{-\varepsilon}{\delta}=\frac{0}{0}$$

und hier ist $\frac{0}{0}$ eine unbestimmte Gröfse, die jeden beliebigen Werth be-

deuten kann, weil ε und δ selbst willkührlich und von einander unabhängig in Null übergehen. Nimmt man z. B. $\varepsilon = 2\delta$, so wird

$$Lim \frac{f(a+\delta)}{f(a-\varepsilon)} = Lim \frac{-2\delta}{\delta} = -2$$

und ebenso leicht kann man rechter Hand jeden anderen Gränzwerth herausbringen. Die in Rede stehende Funktion ist also discontinuirlich für $x = a$.

Zum Schlusse dieser Lehren wollen wir noch einige Betrachtungen anstellen, welche sich auf die Continuität oder Discontinuität solcher Funktionen beziehen, die aus anderen (stetigen oder unstetigen) Funktionen zusammengesetzt sind.

1. Denken wir uns die Funktion $f(x)$ aus m verschiedenen Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_m(x)$ in der Art zusammengesetzt, dafs die Gleichung

$$f(x) = A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + A_3\varphi_3(x) + \dots + A_m\varphi_m(x)$$

statt findet, worin A_1, A_2, ... A_m irgend welche Constanten bedeuten, so ist

$$\begin{aligned} & f(x+\delta) - f(x-\varepsilon) \\ = & A_1[\varphi_1(x+\delta) - \varphi_1(x-\varepsilon)] + A_2[\varphi_2(x+\delta) - \varphi_2(x-\varepsilon)] + \dots \\ & \dots + A_m[\varphi_m(x+\delta) - \varphi_m(x-\varepsilon)] \end{aligned}$$

wobei wir die rechter Hand eingeklammerten Differenzen der Reihe nach mit Δ_1, Δ_2, ... Δ_m bezeichnen wollen, also

$$f(x+\delta) - f(x-\varepsilon) = A_1\Delta_1 + A_2\Delta_2 + A_3\Delta_3 + \dots + A_m\Delta_m$$

Nennen wir Δ' die absolut gröfste und Δ'' die absolut kleinste unter den Differenzen Δ_1, Δ_2, ... Δ_m, so ist offenbar

$$\begin{aligned} f(x+\delta) - f(x-\varepsilon) & < (A_1 + A_2 + \dots + A_m)\Delta' \\ \text{und} \quad & > (A_1 + A_2 + \dots + A_m)\Delta'' \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dafs die Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_m(x)$ durchaus stetig sind, nähern sich für verschwindende δ und ε die Differenzen Δ_1, Δ_2, ... Δ_m, also auch Δ' und Δ'' der Gränze Null und daraus folgt vermöge der obigen Ungleichung

$$Lim [f(x+\delta) - f(x-\varepsilon)] = 0$$

d. h. die Summe einer endlichen Menge stetiger Funktionen ist selbst eine stetige Funktion. Dieser Satz bleibt jedoch nicht mehr richtig, wenn die Anzahl m der Funktionen unendlich wird, denn es könnte in diesem Falle geschehen, dafs in den Produkten

$$(A_1 + A_2 + \dots + A_m)\Delta'$$
$$(A_1 + A_2 + \dots + A_m)\Delta''$$

der erste Faktor unendlich zu-, der zweite unendlich abnähme und das Produkt sich einer endlichen Gränze näherte. In der That werden wir

später Fälle kennen lernen, bei welchen die Summe einer unendlichen Menge stetiger Funktionen discontinuirlich ist.

Befindet sich unter den Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ etc. eine einzige discontinuirliche, so ist auch das Aggregat

$$f(x) = A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \ldots + A_m\varphi_m(x)$$

discontinuirlich und zwar an derselben Stelle, an welcher es jene eine Funktion ist (denn es verschwindet dann eine der Differenzen Δ_1, Δ_2, ... Δ_m nicht); dagegen gilt diese Bemerkung nicht mehr, wenn unter den Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_m(x)$ mehrere discontinuirliche vorkommen, denn es kann geschehen, dafs die Discontinuitäten sich gegenseitig aufheben; so sind z. B. $sec\, x$ und $x^2 - sec\, x$ beide discontinuirlich, ihre Summe aber ist eine stetige Funktion von x.

2. Wenn $f(x)$ ein Produkt aus mehreren Funktionen ist, etwa

$$f(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdot \varphi_3(x) \ldots \varphi_m(x)$$

so hat man

$$\frac{f(x+\delta)}{f(x-\varepsilon)} = \frac{\varphi_1(x+\delta)}{\varphi_1(x-\varepsilon)} \cdot \frac{\varphi_2(x+\delta)}{\varphi_2(x-\varepsilon)} \cdots \frac{\varphi_m(x+\delta)}{\varphi_m(x-\varepsilon)}.$$

Setzen wir sämmtliche mit φ bezeichnete Funktionen als continuirliche voraus, so nähert sich bei verschwindenden δ und ε jeder der Quotienten

$$\frac{\varphi_1(x+\delta)}{\varphi_1(x-\varepsilon)}, \quad \frac{\varphi_2(x+\delta)}{\varphi_2(x-\varepsilon)}, \quad \ldots \quad \frac{\varphi_m(x+\delta)}{\varphi_m(x-\varepsilon)}$$

der Einheit als Gränze und wir können daher diese Quotienten der Reihe nach mit

$$1+\varrho_1, \quad 1+\varrho_2, \quad \ldots \quad 1+\varrho_m$$

bezeichnen, wo ϱ_1, ϱ_2, ... ϱ_m Gröfsen sind, die mit δ und ε gleichzeitig verschwinden. Es ist dann

$$\frac{f(x+\delta)}{f(x-\varepsilon)} = (1+\varrho_1)(1+\varrho_2)\ldots(1+\varrho_m)$$

und wenn wir $1+\varrho'$ den gröfsten, $1+\varrho''$ den kleinsten der Faktoren nennen, so finden die Beziehungen statt

$$\frac{f(x+\delta)}{f(x-\varepsilon)} < (1+\varrho')^m$$
$$\text{und} \quad > (1+\varrho'')^m$$

für $\delta = 0$ und $\varepsilon = 0$ gehen sämmtliche ϱ, also auch ϱ' und ϱ'' in Null über und mithin ist dann

$$Lim \frac{f(x+\delta)}{f(x-\varepsilon)} = 1$$

d. h. ein Produkt aus einer endlichen Anzahl stetiger Funktionen ist wiederum eine stetige Funktion.

Für eine unendliche Menge von Faktoren gilt dieser Satz nicht, weil dann die Gröfsen

$$(1+\varrho')^m \quad \text{und} \quad (1+\varrho'')^m$$

sich einer von Eins verschiedenen Gränze nähern können, wie z. B. $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ der Zahl e.

Befindet sich unter den Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_m(x)$ eine einzige discontinuirliche, so erleidet auch das Produkt eine Unterbrechung der Stetigkeit, und zwar an derselben Stelle wie der discontinuirliche Faktor. Sind aber mehrere discontinuirliche Faktoren vorhanden, so braucht das Produkt nicht nothwendig discontinuirlich zu sein; so sind z. B. $tan\,x$ und $x\,cot\,x$ beide discontinuirlich, ihr Produkt ist es aber nicht.

Capitel IV.

Die Quadratur der Funktionen.

§. 12.

Die Flächen und körperlichen Räume als Gränzwerthe betrachtet.

I. Eine der elegantesten Anwendungen der Lehre von den Gränzen der Funktionen bildet die Bestimmung der Fläche, welche von irgend einer ebenen Curve, zwei Ordinaten derselben und der Abscissenachse begränzt wird, also das Problem der sogen. Quadratur krummer Linien. Denken wir uns nämlich zur Veranschaulichung des eben Gesagten eine beliebige Curve, Fig. 8, deren Gleichung $y=f(x)$ sein möge, und zwei bestimmte Abscissen $OA=a$ und OB, welchen die beiden Ordinaten $AP=f(a)$ und $BQ=f(b)$ entsprechen, so ist unmittelbar klar, dafs die über der Strecke $AB=b-a$ stehende Fläche $ABQP$ in irgend einem Zusammenhange mit der gegebenen Curve und den Abscissen a, b stehen mufs und man könnte daher die Bestimmung der Gröfse jener Fläche zur Aufgabe machen. Diese für die gesammte höhere Mathematik wichtige Aufgabe ist eben das Problem der Quadratur einer gegebenen Curve.

Um zunächst die Aufgabe etwas zu vereinfachen, denken wir uns den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Punkte A verlegt, so dafs nunmehr etwa $y=\varphi(x)$ die Gleichung der Curve wäre, und setzen die willkührliche Strecke $AB=x$, wodurch das Problem auf die Bestimmung der über der Abscisse x stehenden Fläche einer Curve zurückgeführt wäre. Es ist nun leicht, ein Mittel zur näherungsweisen Berechnung dieser

Fläche zu entdecken. Theilen wir nämlich die Abscisse $AB = x$ in eine grofse Anzahl gleicher Theile und errichten in dem Endpunkte jedes solchen Theiles eine Ordinate, so zerfällt die Fläche $ABQP$ in eine gleichgrofse Anzahl von Streifen, deren Breite um so geringer ausfällt, je gröfser die Anzahl jener Theile ist. Mit einiger Aufopferung von Genauigkeit könnte man nun jeden solchen Streifen als Rechteck ansehen, hiernach seine Fläche berechnen, und die Summe aller dieser Flächen als einen Näherungswerth der Fläche $ABQP$ bezeichnen. Dieser Gedanke ist sehr leicht zu realisiren, sobald man nur eine bestimmte Bezeichnung einführt; setzt man die Anzahl der Theile $= n$ und nennt δ einen solchen Theil, also

$$\delta = \frac{x}{n},$$

so ist $AP = \varphi(0)$ die Höhe des ersten Rechtecks, die Höhe des zweiten Rechtecks würde die zur Abscisse δ gehörige Ordinate, also $\varphi(\delta)$ sein, das dritte Rechteck hat zur Höhe die der Abscisse 2δ entsprechende Ordinate $\varphi(2\delta)$ u. s. w.; die Summe aller Rechtecke ist demnach

$$\delta\,\varphi(0) + \delta\,\varphi(\delta) + \delta\,\varphi(2\delta) + \ldots + \delta\,\varphi(\overline{n-1}\,\delta)$$

oder

$$S_n = \delta\,[\varphi(0) + \varphi(\delta) + \varphi(2\delta) + \ldots + \varphi(\overline{n-1}\,\delta)],$$

wobei wir S_n als blofses Abkürzungszeichen für die obige Rechteckssumme benutzt haben.

So gewifs nun auch diese Rechteckssumme S_n die ungefähre Gröfse der Fläche $ABQP$ angiebt, so ungewifs ist der Grad von Genauigkeit, welchen diese Angabe besitzt, und es bedarf daher noch einer besonderen Untersuchung darüber, ob man durch eine fortwährende Vergröfserung der Theilzahl n sich der Fläche $ABQP$ so weit nähern kann, als man will, oder ob die Annäherung, welche in der obigen Formel liegt, nur bis zu einem bestimmten Grade der Genauigkeit getrieben werden kann. — Setzen wir die Curve als stetig verlaufend von P bis Q voraus, so läfst sich die Differenz je zweier benachbarten Ordinaten kleiner als jede beliebige Gröfse λ machen, weil es durch hinreichende Vergröfserung der Zahl n jederzeit möglich ist, die Ordinaten einander so nahe zu rücken, als es nur verlangt wird. Hat man nun n so grofs genommen, dafs sämmtliche Ordinatendifferenzen weniger als die willkührlich kleine Linie λ betragen, so schneide man λ von dem oberen Endpunkte jeder Ordinate ab, einmal auf der Ordinate, das andere Mal auf deren Verlängerung, und ziehe durch jeden so erhaltenen Punkt eine Parallele zur Abscissenachse. So z. B. stellt in Fig. 9 $FGNM$ einen der Streifen aus Fig. 8 dar; dabei ist $ML = ML' = \lambda$ genommen und $LK \parallel L'K' \parallel FG$; vermöge der Voraus-

setzung, dafs die Ordinatendifferenz $GN - FM < \lambda$ ist, fällt nun der Bogen MN in das Rechteck $LKK'L'$ und es gilt die Ungleichung

$$FGK'L' > FGNM > FGKL.$$

Wenden wir diefs auf jeden der vorhandenen Streifen an, die wir der Reihe nach mit t_1, t_2, t_3, ... t_n bezeichnen wollen, so ergeben sich folgende Ungleichungen:

$$\delta[\varphi(0) + \lambda] > t_1 > \delta[\varphi(0) - \lambda]$$
$$\delta[\varphi(\delta) + \lambda] > t_2 > \delta[\varphi(\delta) - \lambda]$$
$$\delta[\varphi(2\delta) + \lambda] > t_3 > \delta[\varphi(2\delta) - \lambda]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta[\varphi(\overline{n-1}\,\delta) + \lambda] > t_n > \delta[\varphi(\overline{n-1}\,\delta) - \lambda]$$

Durch Addition derselben ergiebt sich unter Rücksicht auf No. (2) und wegen $n\delta = x$

$$S_n + x\lambda > T > S_n - x\lambda$$

worin T die Summe aller Streifen, d. h. die Fläche $ABQP$ bezeichnet. Aus der vorstehenden Ungleichung folgt aber leicht

$$\lambda x > T - S_n > -\lambda x$$

und hieraus geht hervor, dafs sich die Differenz $T - S_n$ kleiner als jede angebbare Zahl machen läfst, weil λ beliebig klein angenommen und folglich auch λx beliebig klein werden kann. Dieses Ergebnifs sagt mit anderen Worten, dafs T der Gränzwerth von S_n ist, wenn man n ins Unendliche wachsen läfst, wodurch δ ins Unendliche hinab verkleinert wird; wir haben demnach die Formel

$$(1) \qquad T = Lim\left\{\delta[\varphi(0) + \varphi(\delta) + \varphi(2\delta) + \ldots + \varphi(\overline{n-1}\,\delta)]\right\}$$

oder auch

$$(2) \qquad T = Lim\left\{\frac{x}{n}\left[\varphi(0) + \varphi\left(\frac{x}{n}\right) + \varphi\left(\frac{2x}{n}\right) + \cdots + \varphi\left(\frac{\overline{n-1}\,x}{n}\right)\right]\right\}$$

II. Es bedarf nur einer geringen Modifikation der geometrischen Deutung, um die obigen Betrachtungen auf den Fall anzuwenden, wo es sich nicht mehr um die Quadratur einer Curve, sondern um die Berechnung eines körperlichen Raumes, d. h. um die Cubatur einer Fläche handelt. Denken wir uns OX, OY, OZ (Fig. 10) als rechtwinklige Coordinatenachsen, dazu eine Fläche und zwei Ebenen, welche in den Entfernungen $OA = a$ und $OB = b$ parallel zur Coordinatenebene YOZ gelegt sind, so liegt zwischen den Coordinatenebenen XOY, XOZ, den beiden Parallelebenen APU, BQV und der Fläche $PQVU$ ein körperlicher Raum ($AUVBQP$), dessen Gröfse sich auf folgende Weise bestimmen läfst. Man denke sich zunächst A als Anfangspunkt der Coordinaten, AX als Abscissenachse, und nenne $\varphi(x)$ die Fläche des Querschnittes,

welcher entsteht, wenn man im Endpunkte des x eine Ebene senkrecht auf AX errichtet [also z. B. für $AB = x$, Fläche $BQV = \varphi(x)$], so kann man das gesuchte Volumen zunächst in eine Reihe von Schichten zerlegen, die sich näherungsweis als Cylinder ansehen lassen. Man theilt nämlich $AB = x$ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und legt durch jeden Theilpunkt eine Ebene senkrecht auf AB; heifst n die Anzahl dieser Theile und $\delta = \frac{x}{n}$ ein solcher Theil, so sind die Flächen der entstandenen Querschnitte: $APU = \varphi(0)$, dann $\varphi(\delta)$, $\varphi(2\delta)$ etc. und wenn man die n Schichten des Volumens als Cylinder mit den Grundflächen $\varphi(0)$, $\varphi(\delta)$, $\varphi(2\delta)$, ... $\varphi(\overline{n-1}\,\delta)$ und der gleichen Höhe δ berechnet, so wäre das gesuchte Volumen näherungsweis

$$S_n = \delta\varphi(0) + \delta\varphi(\delta) + \delta\varphi(2\delta) + \ldots + \delta\varphi(\overline{n-1}\,\delta)$$

Ist nun der Querschnitt $\varphi(x)$ eine stetige Funktion der Abscisse x, so läfst sich die Differenz zweier benachbarten Querschnitte kleiner als jede beliebig kleine Fläche λ machen; letztere nehme man willkührlich an und denke sie sich ringförmig um die einzelnen Querschnitte gelegt, einmal nach Aufsen (additiv), das andere Mal nach Innen (subtraktiv); im ersten Falle lassen sich über den um λ vermehrten Querschnitten Cylinder von der gemeinschaftlichen Höhe δ bilden, welche die Schichten des körperlichen Raumes umschliefsen, mithin gröfser als letztere sind, im zweiten Falle erhält man zu kleine Cylinder. Es bleiben nunmehr die früheren auf Ungleichheiten basirten Schlüsse dieselben, wenn man unter t_1, t_2, ... t_n die Volumina der einzelnen Schichten, unter T das gesuchte Volumen und unter S_n die Summe der Cylinderräume versteht, welche über den Querschnitten $\varphi(0)$, $\varphi(\delta)$, $\varphi(2\delta)$, ... $\varphi(\overline{n-1}\,\delta)$ mit der gemeinsamen Höhe δ construirt sind. Die Formeln (1) und (2) gelten daher auch gleichförmig für die neuen Bedeutungen von T und φ.

III. Abgesehen von dem geometrischen Sinne der vorigen Betrachtungen, ist auch an sich unmittelbar klar, dafs der Gränzwerth des Ausdruckes

$$\frac{x}{n}\left[\varphi(0) + \varphi\left(\frac{x}{n}\right) + \varphi\left(\frac{2x}{n}\right) + \ldots + \varphi\left(\frac{\overline{n-1}\,x}{n}\right)\right]$$

eine Funktion von x sein wird, welche mit der gegebenen Funktion $\varphi(x)$ in einem bestimmten Zusammenhange stehen mufs. Diese neue Funktion könnte man die Quadratur der gegebenen Funktion nennen und sie mit $Q\varphi(x)$ bezeichnen, wobei man sich nur zu merken hat, dafs hier Q kein Faktor, sondern ein Operationszeichen ist. Demnach wäre jetzt die Gleichung

$$(3) \quad Q\varphi(x) = Lim \left\{\frac{x}{n}\left[\varphi(0) + \varphi\left(\frac{x}{n}\right) + \varphi\left(\frac{2x}{n}\right) + \dots + \varphi\left(\frac{\overline{n-1}\,x}{n}\right)\right]\right\}$$

einfach die Definition des Symboles $Q\varphi(x)$ mit Verschweigung der geometrischen Betrachtung, welche auf die Erörterung des rechter Hand stehenden Gränzwerthes hinführte.

§. 13.

Die Quadratur der Potenz.

Wenn es sich darum handelte, $Q(x^\mu)$ zu bestimmen, so wäre nach No. (2)

$$Q(x^\mu) = Lim \left\{\frac{x}{n}\left[0^\mu + \left(\frac{x}{n}\right)^\mu + \left(\frac{2x}{n}\right)^\mu + \dots + \left(\frac{\overline{n-1}\,x}{n}\right)^\mu\right]\right\}$$

und hier müssen wir μ als positive Gröfse voraussetzen, weil sonst 0^μ unendlich werden würde. Es ist bei dieser Annahme zugleich kürzer

$$Q(x^\mu) = Lim \left\{\frac{1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \dots + (n-1)^\mu}{n^{\mu+1}}\, x^{\mu+1}\right\}$$

oder

$$(1) \quad Q(x^\mu) = Lim \left\{\frac{1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \dots + (n-1)^\mu}{n^{\mu+1}}\right\} x^{\mu+1}$$

weil der Faktor $x^{\mu+1}$ kein n enthält. Um nun den bezeichneten Gränzwerth aufzufinden, wäre es das Natürlichste, zunächst die Summe der Zahlenreihe

$$1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \dots + (n-1)^\mu$$

zu ermitteln, diese durch $n^{\mu+1}$ zu dividiren und nachher zur Gränze für unendlich wachsende n überzugehen. In der That würde sich dieses Verfahren in einigen Fällen ausführen lassen; so ist z. B. nach bekannten Formeln

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

mithin

$$Lim \frac{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)}{n^2} = Lim \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Lim \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} = Lim \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{6} = \frac{1}{3}$$

Aber diese Methode hat den Nachtheil, dafs sie um so schwerer aus-

führbar wird, je höher die Werthe von μ sind, weil dann jene Summen immer verwickelter ausfallen. Wir benutzen daher ein anderes Verfahren.

Für jedes beliebige ganze positive μ und zwei willkührliche Zahlen a und b, von denen a die gröfsere sein möge, gilt bekanntlich die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{a^{\mu+1} - b^{\mu+1}}{a - b}$$
$$= a^{\mu} + a^{\mu-1}b + a^{\mu-2}b^2 + \ldots + a^2b^{\mu-2} + ab^{\mu-1} + b^{\mu}$$

deren rechte Seite $\mu + 1$ Summanden enthält. Setzen wir auf dieser Seite durchgängig a für b, so wird die rechts stehende Summe zu grofs und es ist daher

$$\frac{a^{\mu+1} - b^{\mu+1}}{a - b} < (\mu + 1)\, a^{\mu}$$

Für $a = z$, $b = z - 1$, wodurch die Bedingung $a > b$ für jede positive Zahl z erfüllt ist, folgt hieraus

$$z^{\mu+1} - (z - 1)^{\mu+1} < (\mu + 1)\, z^{\mu}$$

oder umgekehrt

$$(3) \qquad z^{\mu} > \frac{z^{\mu+1} - (z - 1)^{\mu+1}}{\mu + 1}.$$

Setzen wir dagegen in der Gleichung (2) rechter Hand durchgängig b für a, so erhalten wir eine zu kleine Summe, nämlich

$$\frac{a^{\mu+1} - b^{\mu+1}}{a - b} > (\mu + 1)\, b^{\mu}$$

Für $b = z$, $a = z + 1$, wo nun ebenfalls $a > b$, folgt hieraus

$$(z + 1)^{\mu+1} - z^{\mu+1} > (\mu + 1)\, z^{\mu}$$

oder umgekehrt

$$(4) \qquad z^{\mu} < \frac{(z + 1)^{\mu+1} - z^{\mu+1}}{\mu + 1}.$$

Die Ungleichungen (3) und (4) lassen sich in die folgende zusammenfassen:

$$\frac{(z + 1)^{\mu+1} - z^{\mu+1}}{\mu + 1} > z^{\mu} > \frac{z^{\mu+1} - (z - 1)^{\mu+1}}{\mu + 1}$$

und aus dieser ergeben sich der Reihe nach für $z = 1, 2, 3, \ldots (n - 1)$ die Beziehungen:

$$\frac{2^{\mu+1}-1^{\mu+1}}{\mu+1} > 1^\mu > \frac{1^{\mu+1}}{\mu+1}$$

$$\frac{3^{\mu+1}-2^{\mu+1}}{\mu+1} > 2^\mu > \frac{2^{\mu+1}-1^{\mu+1}}{\mu+1}$$

$$\frac{4^{\mu+1}-3^{\mu+1}}{\mu+1} > 3^\mu > \frac{3^{\mu+1}-2^{\mu+1}}{\mu+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n^{\mu+1}-(n-1)^{\mu+1}}{\mu+1} > (n-1)^\mu > \frac{(n-1)^{\mu+1}-(n-2)^{\mu+1}}{\mu+1}$$

Die Addition derselben liefert sogleich die neue Ungleichung:

$$\frac{n^{\mu+1}-1}{\mu+1} > 1^\mu + 2^\mu + \ldots + (n-1)^\mu > \frac{(n-1)^{\mu+1}}{\mu+1}$$

wo man linker Hand die negative 1 weglassen kann, wodurch die Ungleichung stärker wird. Die Division mit $n^{\mu+1}$ giebt jetzt

$$\frac{1}{\mu+1} > \frac{1^\mu + 2^\mu + \ldots + (n-1)^\mu}{n^{\mu+1}} > \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\mu+1}}{\mu+1}$$

und hieraus folgt durch Übergang zur Gränze für unendlich wachsende n,

(5) $$Lim\,\frac{1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \ldots + (n-1)^\mu}{n^{\mu+1}} = \frac{1}{\mu+1}$$

und wenn man auf die Gleichung zurückgeht, so ergiebt sich die Formel

(6) $$Q(x^\mu) = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$$

welche somit für alle ganzen positiven μ bewiesen ist.

Für andere als derartige μ macht die Quadratur von x^μ einige Schwierigkeiten, mit deren Überwindung wir uns um so weniger aufhalten wollen, als die späteren Untersuchungen immer nur den Fall eines ganzen positiven μ voraussetzen.

§. 14.

Quadratur der Exponenzialgröfse, des Sinus und Cosinus.

I. Für $\varphi(x) = a^x$ haben wir vermöge der Definition des Symboles $Q\varphi(x)$

$$Q(a^x) = Lim\left\{\delta\left[a^0 + a^\delta + a^{2\delta} + a^{3\delta} + \ldots + a^{(n-1)\delta}\right]\right\}$$

Giebt man der eingeklammerten Reihe die Form

$$1 + a^\delta + (a^\delta)^2 + (a^\delta)^3 + \ldots + (a^\delta)^{n-1}$$

so erkennt man in ihr eine geometrische Progression, deren Summe durch

$$\frac{(a^\delta)^n - 1}{a^\delta - 1} = \frac{a^{n\delta} - 1}{a^\delta - 1} = \frac{a^x - 1}{a^\delta - 1}$$

dargestellt wird. Demnach ist jetzt

$$Q(a^x) = Lim \left\{ \delta \frac{a^x - 1}{a^\delta - 1} \right\} = Lim \frac{\left\{ \frac{a^x - 1}{a^\delta - 1} \right\}}{\delta}$$

und wenn man berücksichtigt, dafs sich $\frac{a^\delta - 1}{\delta}$ der Gränze la nähert, so folgt auf der Stelle

(1) $$Q(a^x) = \frac{a^x - 1}{la}.$$

Am einfachsten gestaltet sich diese Formel, wenn man für a die Basis der natürlichen Logarithmen, also $a = e$ setzt; es wird dann

(2) $$Q(e^x) = e^x - 1.$$

II. Um die Quadratur des Sinus auszuführen, hat man zunächst

(3) $$Q\,(sin\;x)$$
$$= Lim \left\{ \delta\,[sin\,\delta + sin\,2\delta + sin\,3\delta + \ldots + sin(n-1)\,\delta] \right\}$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe läfst sich auf folgende Weise finden; man bezeichne die unbekannte Summe mit S, multiplizire die nunmehrige Gleichung

$$S = sin\,\delta + sin\,2\delta + sin\,3\delta + \ldots + sin\,(n-1)\,\delta$$

mit $2\,sin\,\frac{1}{2}\,\delta$ und zerlege rechter Hand jedes doppelte Sinusprodukt in eine Cosinusdifferenz [nach der Formel $2\,sin\,A\,sin\,B = cos\,(A-B) - cos\,(A+B)$], so ist

$$\begin{aligned} 2\,S\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\delta = \quad & cos\,\tfrac{1}{2}\,\delta - cos\,\tfrac{3}{2}\,\delta \\ & + cos\,\tfrac{3}{2}\,\delta - cos\,\tfrac{5}{2}\,\delta \\ & + cos\,\tfrac{5}{2}\,\delta - cos\,\tfrac{7}{2}\,\delta \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + cos\,\frac{2n-3}{2}\,\delta - cos\,\frac{2n-1}{2}\,\delta \end{aligned}$$

mithin nach gehöriger Hebung

$$2\,S\,sin\,\frac{1}{2}\,\delta = cos\,\frac{1}{2}\,\delta - cos\,\frac{2n-1}{2}\,\delta$$

Hieraus findet sich S und vermöge der Bedeutung von S hat man also die Summenformel

(4) $$\sin\delta + \sin 2\delta + \sin 3\delta + \ldots + \sin(n-1)\delta$$
$$= \left[\cos\frac{1}{2}\delta - \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\delta\right]\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\delta}$$

In der Anwendung auf die Gleichung (3) ist zu berücksichtigen, dafs $n\delta = x$, also $\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\delta = \cos\left(n\delta-\frac{1}{2}\delta\right) = \cos\left(x-\frac{1}{2}\delta\right)$ ist, wodurch man erhält

$$Q(\sin x) = Lim\left\{\left[\cos\frac{1}{2}\delta - \cos\left(x-\frac{1}{2}\delta\right)\right]\frac{\frac{1}{2}\delta}{\sin\frac{1}{2}\delta}\right\}$$

oder bei Ausführung des angedeuteten Überganges zur Gränze

$$Q(\sin x) = 1 - \cos x.$$

Es ist nicht schwer, ein etwas allgemeineres Resultat auf demselben Wege zu erhalten; behandelt man nämlich die Funktion $\sin ax$ auf ganz dieselbe Weise, wie es hier mit $\sin x$ geschehen ist, so findet man

(5) $$Q(\sin ax) = \frac{1-\cos ax}{a}.$$

III. Ein ganz ähnliches Verfahren führt zur Kenntnifs von $Q(\cos x)$; man hat nämlich zunächst

(6) $$Q(\cos x)$$
$$= Lim\left\{\delta\left[1 + \cos\delta + \cos 2\delta + \cos 3\delta + \ldots + \cos(n-1)\delta\right]\right\}$$

Bezeichnen wir die Summe der eingeklammerten Reihe mit S, multiplizi-ren die nunmehrige Gleichung

$$S = 1 + \cos\delta + \cos 2\delta + \cos 3\delta + \ldots + \cos(n-1)\delta$$

mit $2\sin\frac{1}{2}\delta$ und zerlegen rechter Hand jedes Produkt in eine Differenz zweier Sinus [nach der Formel $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$], so folgt

$$\begin{aligned}2S\sin\frac{1}{2}\delta = \; & 2\sin\frac{1}{2}\delta \\ & + \sin\frac{3}{2}\delta - \sin\frac{1}{2}\delta \\ & + \sin\frac{5}{2}\delta - \sin\frac{3}{2}\delta \\ & + \sin\frac{7}{2}\delta - \sin\frac{5}{2}\delta \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \sin\frac{2n-1}{2}\delta - \sin\frac{2n-3}{2}\delta\end{aligned}$$

und nach gehöriger Hebung

$$2\,S\,\sin\frac{1}{2}\delta = \sin\frac{1}{2}\delta + \sin\frac{2n-1}{2}\delta$$

Hieraus bestimmt sich S, und vermöge der Bedeutung von S ist dann

$$(7)\qquad 1 + \cos\delta + \cos 2\delta + \cos 3\delta + \ldots + \cos(n-1)\delta$$
$$= \left[\sin\frac{1}{2}\delta + \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\delta\right]\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\delta}$$

mithin durch Substitution in die Gleichung (6)

$$Q(\cos x) = Lim\left\{\left[\sin\frac{1}{2}\delta + \sin\left(x-\frac{1}{2}\delta\right)\right]\frac{\frac{1}{2}\delta}{\sin\frac{1}{2}\delta}\right\}$$

wobei x für $n\delta$ gesetzt worden ist. Die Ausführung des angedeuteten Gränzenüberganges liefert nun sogleich die Formel

$$Q(\cos x) = \sin x$$

Dasselbe Verfahren, auf die Funktion $\cos\alpha x$ angewendet, giebt die allgemeinere Formel

$$(8)\qquad Q(\cos\alpha x) = \frac{\sin\alpha x}{\alpha}.$$

Die bisher entwickelten Quadraturen der Potenz mit ganzem positiven Exponenten, der Exponenzialgröfse, des Sinus und Cosinus sind die einzigen, welche ohne besondere Kunstgriffe ausgeführt werden können; um aber die verschiedenen Mittel zu zeigen, welche in anderen Fällen benutzt werden müssen, geben wir noch einige Quadraturen, durch welche zwischen anscheinend ganz verschiedenen Funktionen ein interessanter Zusammenhang aufgedeckt wird.

§. 15.

Quadratur von $1 : (1 + x)$.

Nach den in §. 8. entwickelten Lehren gelten für die Zahl e die beiden Ungleichungen

$$e > \left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho} \quad \text{und} \quad e < \left(\frac{1}{1-\frac{1}{\varrho}}\right)^{\varrho}$$

wobei ϱ eine beliebige positive die Einheit übersteigende Zahl bezeichnet. Nimmt man von diesen Ungleichungen die natürlichen Logarithmen und dividirt beiderseits mit ϱ, so folgt

$$\frac{1}{\varrho} > l\left(1+\frac{1}{\varrho}\right), \quad \frac{1}{\varrho} < l\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\varrho}}\right)$$

und diese beiden Beziehungen lassen sich übersichtlicher durch

$$l\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\varrho}}\right) > \frac{1}{\varrho} > l\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)$$

oder

(1) $$l\left(\frac{1}{1-z}\right) > z > l(1+z)$$

darstellen, wo nun z jeden beliebigen positiven ächten Bruch bedeuten darf. Setzt man der Reihe nach

$$z = \frac{\delta}{1}, \quad \frac{\delta}{1+\delta}, \quad \frac{\delta}{1+2\delta}, \quad \frac{\delta}{1+3\delta}, \quad \ldots \quad \frac{\delta}{1+(n-1)\delta}$$

so liefert die vorige Ungleichung folgende Beziehungen:

$$\begin{array}{lllll} l\left(\frac{1}{1-\delta}\right) & > & \frac{\delta}{1} & > & l\left(\frac{1+\delta}{1}\right) \\ l\left(\frac{1+\delta}{1}\right) & > & \frac{\delta}{1+\delta} & > & l\left(\frac{1+2\delta}{1+\delta}\right) \\ l\left(\frac{1+2\delta}{1+\delta}\right) & > & \frac{\delta}{1+2\delta} & > & l\left(\frac{1+3\delta}{1+2\delta}\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l\left(\frac{1+\overline{n-1}\,\delta}{1+\overline{n-2}\,\delta}\right) & > & \frac{\delta}{1+\overline{n-1}\,\delta} & > & l\left(\frac{1+n\delta}{1+\overline{n-1}\,\delta}\right) \end{array}$$

Durch Addition derselben ergiebt sich bei gehöriger Hebung

$$l\left(\frac{1+\overline{n-1}\,\delta}{1-\delta}\right)$$

$$> \frac{\delta}{1} + \frac{\delta}{1+\delta} + \frac{\delta}{1+2\delta} + \ldots + \frac{\delta}{1+\overline{n-1}\,\delta} >$$

$$l(1+n\delta)$$

Die hier vorkommende Summe ist dieselbe, auf die man bei der Quadratur von $\frac{1}{1+x}$ stofsen würde und für welche dann $n\delta = x$ zu setzen ist; diefs giebt hier

$$l\left(\frac{1+x-\delta}{1-\delta}\right)$$

$$> \delta\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{1+\delta} + \frac{1}{1+2\delta} + \ldots + \frac{1}{1+\overline{n-1}\,\delta}\right] >$$

$$l(1+x)$$

Für verschwindende δ nähern sich die beiden äufsersten Gröfsen der gemeinschaftlichen Gränze $l(1+x)$ und der in der Mitte stehende Ausdruck der Gränze $Q\left(\frac{1}{1+x}\right)$; man hat daher

(2) $$Q\left(\frac{1}{1+x}\right) = l(1+x)$$

Hierin liegt zugleich die Quadratur der gleichseitigen Hyperbel, weil sich die Gleichung dieser Curve bekanntlich auf die Form $y = \frac{1}{1+x}$ bringen läfst. Auch rechtfertigt diefs die früher üblich gewesene Benennung hyperbolische Logarithmen statt der jetzigen Bezeichnung natürliche Logarithmen.

Eine weitere Benutzung der Formel (2) wäre die näherungsweise Berechnung der natürlichen Logarithmen; denn man weifs, dafs sich der Werth von $Q\left(\frac{1}{1+x}\right)$, zwar nicht vollkommen genau, aber doch mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit direkt nach der Formel

$$Q\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{x}{n}\left[1 + \frac{1}{1+\frac{x}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2x}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{\overline{n-1}\,x}{n}}\right]$$

finden läfst, wenn man nur n grofs genug nimmt; daher mufs auch die Formel

$$l(1+x)$$
$$= \frac{x}{n} + \frac{x}{x+n} + \frac{x}{2x+n} + \ldots + \frac{x}{\overline{n-1}\,x+n}$$

näherungsweis für grofse n richtig sein. Wie man derartige näherungsweise Quadraturen in einer vortheilhafteren Weise ausführen kann, werden wir in §. 19. zeigen.

§. 16.

Quadratur von $1 : (1 + x^2)$.

Durch Anwendung der bekannten goniometrischen Formel

$$tan\,A - tan\,B = \frac{sin\,(A-B)}{cos\,A\ cos\,B}$$

überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung

(1) $$\frac{tan\,(\alpha+\beta) - tan\,\alpha}{\beta} = \frac{sin\,\beta}{\beta} \cdot \frac{1}{cos\,(\alpha+\beta)\ cos\,\alpha}$$

Nun ist für einen spitzen Bogen nach §. 9. der Quotient

$$\frac{sin\,\beta}{\beta} > cos\,\beta$$

ferner

$$cos\,(\alpha+\beta) = cos\,\alpha\ cos\,\beta - sin\,\alpha\ sin\,\beta < cos\,\alpha\ cos\,\beta$$

Setzt man also in No. (1) statt des ersten Faktors rechter Hand: $cos\,\beta$ und im Nenner statt $cos\,(\alpha+\beta)$ blos $cos\,\alpha\ cos\,\beta$, so hat man den Zähler

zu klein und den Nenner zu grofs genommen; es ist mithin der Quotient zu klein, nämlich

$$\frac{tan\,(\alpha + \beta) - tan\,\alpha}{\beta} > \frac{1}{cos^2\alpha}$$

oder

(2) $$[tan\,(\alpha + \beta) - tan\,\alpha]\,cos^2\alpha > \beta.$$

Diese Beziehung gestaltet sich für unsere Zwecke brauchbarer, wenn wir

(3) $$tan\,\alpha = u, \quad tan\,(\alpha + \beta) = u + \delta$$

setzen, woraus für spitze α und β umgekehrt folgt

$$\alpha = Arctan\,u, \quad \alpha + \beta = Arctan(u + \delta)$$

mithin

(4) $$\beta = Arctan\,(u + \delta) - Arctan\,u$$

Substituiren wir die Werthe aus (3) und (4) in No. (2) unter Berücksichtigung der Gleichung

$$cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tan^2\alpha} = \frac{1}{1 + u^2}$$

so folgt auf der Stelle die Beziehung

(5) $$\frac{\delta}{1 + u^2} > Arctan\,(u + \delta) - Arctan\,u$$

Um zu einer zweiten und ähnlichen Relation zu gelangen, gehen wir von der identischen Gleichung aus

$$\frac{tan\,\alpha - tan\,(\alpha - \beta)}{\beta} = \frac{sin\,\beta}{\beta} \cdot \frac{1}{cos\,\alpha\;cos\,(\alpha - \beta)}$$

und setzen rechter Hand die Einheit an die Stelle des ersten Faktors und zugleich $cos\,\alpha$ für $cos\,(\alpha - \beta)$; hierdurch ist der erste Faktor zu grofs und der Nenner zu klein geworden, folglich die rechte Seite zu grofs, d. i.

$$\frac{tan\,\alpha - tan\,(\alpha - \beta)}{\beta} < \frac{1}{cos^2\alpha}$$

oder

$$[tan\,\alpha - tan\,(\alpha - \beta)]\,cos^2\alpha < \beta$$

Wir führen hier die neue Bezeichnung ein

$$tan\,\alpha = u, \quad tan\,(\alpha - \beta) = u - \delta$$

mithin

$$\alpha = Arctan\,u, \quad \alpha - \beta = Arctan\,(u - \delta)$$
$$\beta = Arctan\,u - Arctan\,(u - \delta)$$

dann geht die obige Ungleichung in die folgende über

(6) $$\frac{\delta}{1 + u^2} < Arctan\,u - Arctan\,(u - \delta)$$

Die Ungleichungen (5) und (6) lassen sich jetzt in die folgende übersichtlichere zusammenfassen

$$Arctan\, u - Arctan\,(u - \delta) > \frac{\delta}{1 + u^2} > Arctan\,(u + \delta) - Arctan\, u$$

und wenn man jetzt für u der Reihe nach 0, δ, 2δ, 3δ, ... $\overline{n-1}\,\delta$ setzt, so folgt durch Addition aller so entstehenden Ungleichungen

$$Arctan\,(\overline{n-1}\,\delta) - Arctan\,(-\delta) >$$
$$\frac{\delta}{1} + \frac{\delta}{1+\delta^2} + \frac{\delta}{1+(2\delta)^2} + \frac{\delta}{1+(3\delta)^2} + \dots + \frac{\delta}{1+(\overline{n-1}\,\delta)^2}$$
$$> Arctan\,(n\delta) - Arctan\, 0$$

oder für $n\delta = x$ und unter Rücksicht auf die Gleichung $Arctan\,(-\delta) = - Arctan\,\delta$

$$Arctan\,(x - \delta) + Arctan\,\delta >$$
$$\delta\left[1 + \frac{1}{1+\delta^2} + \frac{1}{1+(2\delta)^2} + \frac{1}{1+(3\delta)^2} + \dots + \frac{1}{1+(\overline{n-1}\,\delta)^2}\right]$$
$$> Arctan\, x.$$

Für verschwindende δ gehen die beiden äufsersten Gröfsen in $Arctan\, x$ über und die in der Mitte stehende Summe giebt die Quadratur von $\frac{1}{1+x^2}$; wir haben daher die sehr bemerkenswerthe Formel

$$Q\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = Arctan\, x. \tag{7}$$

Hiervon liefse sich eine Anwendung zur Berechnung von Kreisbögen machen, deren Tangenten gegeben sind; wenn nämlich statt δ sein Werth $\frac{x}{n}$ gesetzt und n ziemlich grofs genommen wird, so mufs die Formel

$$Arctan\, x$$
$$= \frac{x}{n}\left[1 + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1+\left(\frac{\overline{n-1}\,x}{n}\right)^2}\right]$$

wenn auch nicht streng, so doch wenigstens näherungsweis richtig sein; für $x = 1$ hätte man z. B.

$$Arctan\, 1 = \frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right]$$

und zwar um so genauer, je gröfser n ist; man müfste ihm jedoch einen sehr ansehnlichen Werth ertheilen, wenn eine erhebliche Genauigkeit erzielt werden sollte.

§. 17.

Quadratur von $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Durch Anwendung der bekannten goniometrischen Formel

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

findet man ohne Mühe

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha}{\beta} = \cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\frac{1}{2}\beta}$$

Da rechter Hand der erste Faktor weniger als $\cos\alpha$ und der zweite Faktor weniger als die Einheit beträgt, so hat man

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha}{\beta} < \cos\alpha$$

oder

(1) $$\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha}{\cos\alpha} < \beta$$

Dieser Beziehung geben wir dadurch eine andere Form, dafs wir

$$\sin\alpha = u, \qquad \sin(\alpha+\beta) = u+\delta$$

mithin

$$\alpha = Arcsin\, u, \qquad \alpha+\beta = Arcsin\,(u+\delta)$$
$$\beta = Arcsin\,(u+\delta) - Arcsin\, u$$

setzen; unter der Bemerkung, dafs jetzt $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-u^2}$ ist, geht die Ungleichung (1) in nachstehende über:

(2) $$\frac{\delta}{\sqrt{1-u^2}} < Arcsin\,(u+\delta) - Arcsin\, u$$

Zu einer ganz ähnlichen Beziehung gelangt man dadurch, dafs man von der identischen Gleichung

$$\frac{\sin\alpha - \sin(\alpha-\beta)}{\beta} = \cos\left(\alpha-\frac{1}{2}\beta\right)\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\frac{1}{2}\beta}$$

ausgeht und für die beiden Faktoren rechter Hand zu kleine Werthe einsetzt. Da nun $\cos(\alpha-\beta)$ mehr als $\cos\alpha$ beträgt, so ist

$$\cos\alpha + \cos(\alpha-\beta) > 2\cos\alpha$$

oder

$$2\cos\left(\alpha-\frac{1}{2}\beta\right)\cos\frac{1}{2}\beta > 2\cos\alpha$$

also

$$\cos\left(\alpha-\frac{1}{2}\beta\right) > \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta}$$

Da ferner nach den Lehren des §. 9. die Ungleichung

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\frac{1}{2}\beta} > \cos\frac{1}{2}\beta$$

statt findet, so folgt jetzt durch Substitution der zu kleinen Werthe

$$\frac{\sin\alpha - \sin(\alpha-\beta)}{\beta} > \cos\alpha$$

oder

$$\frac{\sin\alpha - \sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha} > \beta$$

Diese Ungleichung geht vermöge der Substitutionen

$$\sin\alpha = u, \quad \sin(\alpha-\beta) = u-\delta$$
$$\alpha = Arcsin\, u, \quad \alpha-\beta = Arcsin\,(u-\delta)$$

in die folgende über

(3) $$\frac{\delta}{\sqrt{1-u^2}} > Arcsin\, u - Arcsin\,(u-\delta)$$

Die Ungleichungen (2) und (3) stellen wir in der übersichtlicheren Beziehung zusammen:

$$Arcsin\,(u+\delta) - Arcsin\, u > \frac{\delta}{\sqrt{1-u^2}} > Arcsin\, u - Arcsin\,(u-\delta)$$

Vereinigen wir durch Addition alle diejenigen Ungleichungen, welche aus der vorstehenden für $u = 0,\ \delta,\ 2\delta,\ 3\delta,\ \ldots\ \overline{n-1}\,\delta$ folgen, so ist bei gehöriger Hebung

$$Arcsin\,(n\delta) - Arcsin\, 0 >$$
$$\frac{\delta}{\sqrt{1}} + \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} + \frac{\delta}{\sqrt{1-(2\delta)^2}} + \ldots + \frac{\delta}{\sqrt{1-(\overline{n-1}\,\delta)^2}}$$
$$> Arcsin\,(\overline{n-1}\,\delta) - Arcsin\,(-\delta)$$

oder für $n\delta = x$ und unter Berücksichtigung von $Arcsin\,(-\delta) = -Arcsin\,\delta$

$$Arcsin\, x >$$
$$\delta\left[\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(2\delta)^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1-(\overline{n-1}\,\delta)^2}}\right]$$
$$> Arcsin\,(x-\delta) + Arcsin\,\delta$$

Bei verschwindenden δ erhalten die äufsersten Gröfsen den gemeinschaftlichen Gränzwerth $Arcsin\, x$ und der Gränzwerth des mittleren Ausdrucks

ist $Q\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; wir gelangen somit zu der interessanten Beziehung

(4) $$Q\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = Arcsin\, x$$

Man könnte dieselbe zur näherungsweisen Berechnung eines Bogens verwenden, dessen Sinus x gegeben ist; denn für grofse n müfste näherungsweis die Gleichung

$$Arcsin\, x$$
$$=\frac{x}{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{n}\right)^2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\overline{n-1}\,x}{n}\right)^2}}\right\}$$

gelten; in dem speziellen Falle $x = 1$ gäbe diefs wieder eine Formel zur Berechnung der Ludolph'schen Zahl.

§. 18.

Quadratur zusammengesetzter Funktionen.

I. Es kann häufig vorkommen, dafs eine Funktion aus mehreren anderen Funktionen zusammengesetzt ist, deren Quadraturen, einzeln genommen, ausgeführt werden können; es entsteht dann die Frage, wie man die Quadratur der zusammengesetzten Funktion aus den Quadraturen ihrer einzelnen Bestandtheile zu bilden habe. Denken wir uns z. B. $f(x)$ auf die Weise aus $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zusammengesetzt, dafs

(1) $$f(x) = A\varphi(x) + B\psi(x)$$

ist, wo A und B beliebige Constanten, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein paar beliebige Funktionen von x bezeichnen, so wäre die Frage, wie man $Qf(x)$ findet, wenn $Q\varphi(x)$ und $Q\psi(x)$ bekannt sind. Nach der obigen Gleichung ist nun

$$\delta\,[f(0) + f(\delta) + f(2\delta) + \dots + f(\overline{n-1}\,\delta)]$$
$$= \delta\,[A\varphi(0) + B\psi(0) + A\varphi(\delta) + B\psi(\delta) + A\varphi(2\delta) + B\psi(2\delta) + \dots$$
$$\dots + A\varphi(\overline{n-1}\,\delta) + B\psi(\overline{n-1}\,\delta)]$$

wobei man die rechte Seite auch unter der Form

$$A\,.\,\delta\,[\varphi(0) + \varphi(\delta) + \varphi(2\delta) + \dots + \varphi(\overline{n-1}\,\delta)]$$
$$+ B\,.\,\delta\,[\psi(0) + \psi(\delta) + \psi(2\delta) + \dots + \psi(\overline{n-1}\,\delta)]$$

darstellen kann. Setzt man überall $n\delta = x$ und geht darauf zur Gränze über, so ergiebt sich auf der Stelle die Formel

(2) $$Qf(x) = A\,.\,Q\varphi(x) + B\,.\,Q\psi(x)$$

oder vermöge der Gleichung (1)

(3) $$Q\,[A\,.\,\varphi(x) + B\,.\,\psi(x)] = A\,.\,Q\varphi(x) + B\,.\,Q\psi(x)$$

und hiermit ist die obige Frage beantwortet.

Wäre überhaupt allgemeiner

$$f(x) = A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \dots + A_m\varphi_m(x)$$

so würde man durch ganz dieselbe Betrachtung wie vorhin leicht finden

$$Qf(x) = A_1 \cdot Q\varphi_1(x) + A_2 \cdot Q\varphi_2(x) + \dots + A_m \cdot Q\varphi_m(x)$$

oder vermöge der Bedeutung von $f(x)$

(4) $$Q[A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \dots + A_m\varphi_m(x)]$$
$$= A_1 \cdot Q\varphi_1(x) + A_2 \cdot Q\varphi_2(x) + \dots + A_m \cdot Q\varphi_m(x)$$

So einfach dieses Theorem ist, so brauchbar zeigt sich dasselbe in vielen Fällen. Um z. B. die Quadratur von

$$\frac{1 - x^n}{1 - x}$$

zu bewerkstelligen, bedarf es nur der Bemerkung, dafs dieser Ausdruck die Summe einer geometrischen Progression darstellt; man hat dann

$$Q\left(\frac{1 - x^n}{1 - x}\right) = Q(x^0 + x^1 + x^2 + \dots + x^{n-1})$$
$$= Q(x^0) + Q(x^1) + Q(x^2) + \dots + Q(x^{n-1})$$
$$= \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

Andere Beispiele bieten die Quadraturen von $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ etc. dar.

II. Setzt man in der Formel (3) $A = -1$ und $B = 0$, so ergiebt sich die Gleichung

(5) $$Q[-\varphi(x)] = -Q\varphi(x)$$

deren Sinn sehr leicht in Worte gefafst werden kann. Wir haben nämlich bisher immer stillschweigend vorausgesetzt, dafs die Ordinaten der zu quadrirenden Curve oberhalb der Abscissenachse, d. h. nach der positiven Seite der Ordinatenachse hin construirt waren, und in diesem Falle lag auch die Fläche $Q\varphi(x)$ oberhalb der Abscissenachse. Sind dagegen die Ordinaten negativ, so fällt die zu berechnende Fläche unter die Abscissenachse; die Gleichung (5) sagt nun, dafs derartige Flächen als negativ anzusehen sind, wenn man die Flächen der ersten Art als positiv betrachtet; mit anderen Worten also: negativen Ordinaten entspricht eine negative Fläche.

Wären nun die verschiedenen Ordinaten, welche man innerhalb des Intervalles 0 bis x, also auf der Strecke AB (Fig. 8) errichten kann, theils positiv theils negativ (wie z. B. wenn die Curve die Achse der x durchschneidet), so besteht die Fläche aus einem positiven und einem negativen Theile und die für $Q\varphi(x)$ geltende Formel giebt dann die algebraische Summe dieser Theile, d. h. die Differenz der absoluten Gröfsen dieser Flächen. So hat man z. B.

$$Q(\cos \pi) = \sin \pi = 0$$

und diefs bedeutet weiter nichts, als dafs die über der Abscisse π stehende Fläche der Curve $y = \cos x$ aus zwei gleich grofsen (sogar congruenten) Theilen von entgegengesetzter Lage zusammengesetzt ist, was man durch Construktion leicht bestätigt finden wird. Wollte man die Gröfse eines solchen Theiles bestimmen, so mufs man in der für $Q(\cos x)$ geltenden Formel $x = \frac{1}{2}\pi$ setzen und hat dann $Q\left(\cos \frac{1}{2}\pi\right) = 1$. Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich noch eine Regel für den praktischen Gebrauch der Quadraturenformeln. Weil es nämlich meistentheils darauf ankommt, die absoluten Werthe der Flächen zu bestimmen, so mufs man das Vorkommen negativer Ordinaten vermeiden; diefs kann entweder durch eine passende Veränderung des Coordinatensystemes, oder dadurch geschehen, dafs man die gegebene Fläche in einzelne Flächen zerlegt, von denen jede nur positive oder nur negative Ordinaten enthält, diese einzelnen Flächen berechnet und sie sämmtlich als positiv ansieht.

III. Wenn die Differenz $\varphi(x) - \psi(x)$ immer positiv ist, so hat auch die Quadratur

(6) $$Q[\varphi(x) - \psi(x)] = Q\varphi(x) - Q\psi(x)$$

den vorigen Bemerkungen zufolge einen positiven Werth, d. h. mit anderen Worten:

(7) $$\text{für } \varphi(x) > \psi(x) \text{ ist } Q\varphi(x) > Q\psi(x)$$

Ebenso würde für den Fall, dafs $\varphi(x) - \psi(x)$ stets negativ wäre, auch die in (6) verzeichnete Quadratur negativ sein oder

(8) $$\text{für } \varphi(x) < \psi(x) \text{ ist } Q\varphi(x) < Q\psi(x)$$

So einfach diese Sätze sind, so läfst sich doch häufig ein sehr vortheilhafter Gebrauch von ihnen machen; aus $\cos x < 1$ folgt z. B. nach No. (8) sogleich $\sin x < x$, ebenso giebt die leicht zu erkennende Ungleichung

$$1 > \frac{1}{1 + x^2} > 1 - x^2$$

durch Quadratur auf der Stelle die neue Beziehung

$$x > Arctan\, x > x - \frac{1}{3}x^3$$

Gröfsere Anwendungen dieser Art werden wir in der Folge zeigen.

§. 19.

Näherungsweise Quadraturen.

I. Wenn es nicht glücken will, den Gränzwerth zu bestimmen, welchem sich der Ausdruck

$$\delta\,[\varphi(0) + \varphi(\delta) + \varphi(2\delta) + \ldots + \varphi(\overline{n-1}\,\delta)]$$

$$\delta = \frac{x}{n}$$

für verschwindende δ nähert, so bleibt nichts übrig, als die wirkliche numerische Berechnung, indem man, sobald x gegeben ist, die Zahl n ziemlich grofs willkührlich annimmt und die oben angedeuteten Rechnungsoperationen ausführt; man erhält dann ein um so genaueres Resultat, je gröfser n gewählt wurde. Bezeichnen wir der Kürze wegen die Ordinaten $\varphi(0)$, $\varphi(\delta)$, $\varphi(2\delta)$ etc. mit y_0, y_1, y_2, ... und die über der Abscisse x stehende Fläche mit F_x, so ist also näherungsweis.

(1) $$F_x = Q\varphi(x)$$
$$= \frac{x}{n}[y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1}]$$

und hierbei sind nach §. 12. die einzelnen Streifen der Fläche als Rechtecke angesehen.

Es erhellt nun unmittelbar, dafs man ein genaueres Resultat erhalten wird, wenn man die einzelnen Streifen als Trapeze ansieht, was im Grunde darauf hinauskommt, einen kleinen Bogen mit seiner Sehne zu verwechseln. Bei dieser Berechnung wird

$$F_x = \delta\frac{y_0 + y_1}{2} + \delta\frac{y_1 + y_2}{2} + \delta\frac{y_2 + y_3}{2} + \ldots + \delta\frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

oder bei Vereinigung aller gleichartigen Gröfsen und wegen $\delta = \frac{x}{n}$

(2) $$F_x = Q\varphi(x)$$
$$= \frac{x}{n}\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right]$$

II. Ein noch genaueres Resultat läfst sich dadurch erreichen, dafs man die Bögen, welche drei auf einander folgende Ordinatenendpunkte verbinden, als Parabelbögen ansieht und sich demnach die Fläche aus Theilen zusammengesetzt denkt, welche für sich betrachtet, von Parabeln begränzt werden. Zu einer für diese Voraussetzung geltenden Formel führt folgender Weg.

Nennen wir p den Parameter einer gewöhnlichen Parabel, nehmen wir ihre Achse zur Ordinatenachse und die Tangente im Scheitel zur Abscissenachse, so ist die Gleichung der Curve

$$y = \frac{x^2}{p} = \frac{1}{p}x^2$$

Die über der Abscisse x stehende Fläche ist demnach

$$Q\left(\frac{1}{p}x^2\right) = \frac{1}{p}Q(x^2) = \frac{1}{p}\frac{x^3}{3}$$

woraus sich leicht der von Archimedes gefundene Satz über die Fläche der Parabel ableiten läfst. In Fig. 11 sei nun B der Scheitel unserer Parabel, BV ihre Achse,

$$BL = u, \quad LL' = L'L'' = \varepsilon$$

dann ist nach dem Obigen

$$\text{die Fläche } BLP = \frac{u^3}{3p}$$

$$\text{und die Fläche } BL''P'' = \frac{(u + 2\varepsilon)^3}{3p}$$

mithin durch Subtraktion der kleineren Fläche von der gröfseren

$$\text{Fläche } LL''P''P = \frac{(u + 2\varepsilon)^3 - u^3}{3p}$$

$$= \frac{1}{3}\varepsilon \frac{6u^2 + 12u\varepsilon + 8\varepsilon^2}{p}$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\text{Fläche } LL''P''P = \frac{1}{3}\varepsilon \left[\frac{u^2}{p} + 4\frac{(u+\varepsilon)^2}{p} + \frac{(u+2\varepsilon)^2}{p}\right]$$

Bezeichnen wir die drei Ordinaten LP, $L'P'$, $L''P''$ der Reihe nach mit v, v', v'', so finden vermöge der Gleichung der Parabel die drei Beziehungen

$$v = \frac{u^2}{p}, \quad v' = \frac{(u+\varepsilon)^2}{p}, \quad v'' = \frac{(u+2\varepsilon)^2}{p}$$

statt, vermöge deren die vorherige Formel in der eleganten Gestalt

$$\text{Fläche } LL''P''P = \frac{1}{3}\varepsilon\,(v + 4v' + v'')$$

dargestellt werden kann. Legen wir durch einen willkürlichen Punkt O die Geraden $OX \parallel BU$, $OY \parallel BV$, betrachten dieselben als Coordinatenachsen und setzen

$$OA = a, \quad AB = b$$
$$OM = \xi, \quad OM' = \xi + \varepsilon, \quad OM'' = \xi + 2\varepsilon$$
$$MP = \eta, \quad M'P' = \eta', \quad M''P'' = \eta''$$

so finden zwischen η und v die Beziehungen

$$v = \eta - b, \quad v' = \eta' - b, \quad v'' = \eta'' - b$$

statt; ferner besteht die Fläche $MM''P''P$ aus dem Rechtecke $LMM''L''$ und der vorhin berechneten Fläche $LL''P''P$ und mithin ist

$$\text{Fläche } MM''P''P = 2\varepsilon b + \frac{1}{3}\varepsilon\,[\eta - b + 4(\eta' - b) + \eta'' - b]$$

oder bei gehöriger Reduktion

$$\text{(3)} \qquad \text{Fl. } MM''P''P = \frac{1}{3}\varepsilon\,(\eta + 4\eta' + \eta'')$$

Man kann diese Betrachtungen leicht umkehren. Sind nämlich drei Punkte P, P', P'' durch die drei Coordinaten ξ und η, $\xi + \varepsilon$ und η', $\xi + 2\varepsilon$ und η'' bestimmt, wobei alle fünf Gröfsen willkührlich gewählt werden

dürfen, so kann man durch jene drei Punkte immer eine Parabel legen, deren Achse den Ordinaten parallel läuft. Denn die Gleichung dieser Parabel wäre unter der letzten Voraussetzung

$$y - b = \frac{(x-a)^2}{p}$$

und da diese Gleichung gelten mufs, wenn man der Reihe nach $x = \xi$, $\xi + \varepsilon$, $\xi + 2\varepsilon$ und $y = \eta$, η', η'' setzt, so erhält man hierdurch drei Bedingungsgleichungen, aus welchen sich die Coordinaten a und b des Scheitels sowohl, als der Parameter p bestimmen lassen. Man kann daher sagen: Wenn durch die Endpunkte der drei um ε von einander entfernten Ordinaten η, η', η'' eine Parabel gelegt wird, so ist die Fläche des zwischen η und η'' enthaltenen Streifens

$$= \frac{1}{3}\varepsilon(\eta + 4\eta' + \eta'')$$

Die Anwendung hiervon macht sich leicht, wenn man die zu bestimmende Fläche $Q\varphi(x) = ABQP$ (Fig. 8) in eine gerade Anzahl von Streifen zerlegt, die Breite eines solchen Streifens ε nennt und für η, η', η'' die Ordinaten der gegebenen Curve substituirt. Sei also für ein beliebiges gerades m

$$\varepsilon = \frac{AB}{m} = \frac{x}{m} \tag{4}$$

und mögen y_0, y_1, y_2, y_3 etc. die Ordinaten $\varphi(0)$, $\varphi(\varepsilon)$, $\varphi(2\varepsilon)$, $\varphi(3\varepsilon)$ etc. heifsen; es ist dann

$$\begin{aligned} F_x = Q\varphi(x) = & \frac{1}{3}\varepsilon(y_0 + 4y_1 + y_2) \\ & + \frac{1}{3}\varepsilon(y_2 + 4y_3 + y_4) \\ & + \frac{1}{3}\varepsilon(y_4 + 4y_5 + y_6) \\ & + \dots\dots\dots \\ & + \frac{1}{3}\varepsilon(y_{m-2} + 4y_{m-1} + y_m) \end{aligned}$$

und bei gehöriger Vereinigung der gleichartigen Gröfsen

$$\begin{aligned} F_x &= Q\varphi(x) \\ &= \frac{1}{3}\varepsilon[y_0 + y_m + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{m-1}) \\ &\qquad + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{m-2})] \end{aligned} \tag{5}$$

In der Praxis ist diese durch einen erheblichen Grad von Genauigkeit sich auszeichnende Formel unter dem Namen der Simpson'schen Regel bekannt.

Um ein interessantes Beispiel zu haben, wollen wir die in der Curve $y = \frac{1}{1+x^2}$ über der Abscisse $x = 1$ stehende Fläche berechnen, von welcher wir den Betrag $Arctan\, 1 = \frac{1}{4}\pi$ bereits auf direktem Wege kennen gelernt haben; es ist dann

$$y_0 = \frac{1}{1}, \quad y_1 = \frac{1}{1+\varepsilon^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{m}\right)^2}$$

$$y_2 = \frac{1}{1+(2\varepsilon)^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{2}{m}\right)^2}$$

u. s. w.

oder wenn wir $m = 10$ setzen, bei numerischer Berechnung

$y_0 = 1{,}0$, $y_{10} = 0{,}5$
$y_1 = 0{,}9900990$,
$y_2 = 0{,}9615384$
$y_3 = 0{,}9174312$,
$y_4 = 0{,}8620690$
$y_5 = 0{,}8$,
$y_6 = 0{,}7352940$
$y_7 = 0{,}6711409$,
$y_8 = 0{,}6097561$
$y_9 = 0{,}5524861$,

Wollte man mittelst dieser Ordinaten nach Formel (1) rechnen, so wäre die gesuchte Fläche für $n = 10$ und $x = 1$,

$$\frac{1}{10}[y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_9]$$
$$= 0{,}70998147$$

was aber von dem wahren Werthe

$$\frac{1}{4}\pi = 0{,}78539816\ldots$$

noch bedeutend abweicht. Nach Formel (2) ist dieselbe Fläche

$$\frac{1}{10}\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_9 + \frac{1}{2}y_{10}\right]$$
$$= 0{,}78498147$$

was schon besser übereinstimmt; nach der Simpson'schen Regel endlich hat jene Fläche den Werth

$$\frac{1}{30}\Big[\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_{10} + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_9)$$
$$+ 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_8)\Big]$$
$$= 0{,}78539813\ldots$$

welcher dem wahren Betrage sehr nahe kommt.

Capitel V.

Bestimmung der Natur der Funktionen aus gegebenen speziellen Werthen derselben.

§. 20.

Form der hieher gehörenden Aufgaben.

Bisher setzten wir die Natur der Funktionen, welche wir betrachteten, jederzeit als bekannt voraus, d. h. wir nahmen an, dafs bei der Aufstellung einer Gleichung von der Form $y = f(x)$ die Rechnungsoperationen bekannt seien, mittelst deren man zu jedem x das zugehörige y finden könnte. Es liefse sich diese Betrachtungsweise aber auch umkehren, indem man die Aufgabe stellte, eine Funktion zu finden, welche diesen oder jenen Bedingungen genügte; bei dieser Aufgabe würden demnach nicht Zahlen, wie in der Algebra, sondern Rechnungsoperationen das Unbekannte und Aufzusuchende sein. Was nun die Bedingungen anbelangt, denen eine zu bestimmende Funktion genügen soll, so können diese hauptsächlich unter zwei Gesichtspunkte gebracht werden; sie bestehen nämlich entweder darin, dafs eine Anzahl spezieller zusammengehöriger Werthe von x und y gegeben ist, welche in die Funktion passen sollen, oder darin, dafs der unbekannten Funktion im voraus gewisse Eigenschaften vorgeschrieben werden; diese beiden sehr verschiedenen Bestimmungsweisen der Funktionen sollen den Inhalt dieses und des nächsten Capitels bilden.

Die Frage, mit der wir uns jetzt zu beschäftigen haben, würde demnach lauten: welcher Art mufs der Zusammenhang zwischen der unabhängigen Variabelen x und der abhängigen Variabelen y sein, damit für gegebene spezielle Werthe von x, etwa für $x = x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, ebensoviel entsprechende und gleichfalls gegebene Werthe von y, etwa $y = y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$, herauskommen sollen? — Es ist zuvörderst nicht schwer, die geometrische Bedeutung dieser Frage einzusehen. Denken wir uns nämlich x_1 und y_1, x_2 und y_2 etc. als rechtwinklige Coordinaten gegebener Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$, so mufs die Curve, welche die gesuchte Gleichung geometrisch darstellt, offenbar durch die gegebenen Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$ hindurchgehn und es ist demnach jenes analytische Problem mit der geometrischen Aufgabe, durch gegebene Punkte eine Curve zu legen, völlig einerlei.

Man wird leicht bemerken, dafs in dieser Fassung die Aufgabe noch sehr unbestimmt bleibt, da es sehr viele und ihrer Natur nach durchaus

verschiedene Curven geben kann, welche durch die nämlichen vorgeschriebenen Punkte hindurchgehen. So z. B. lassen sich durch drei gegebene Punkte ebensowohl eine Parabel als ein Kreis legen; wären etwa diese drei Punkte durch die Coordinaten

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 12$$
$$x_2 = 5, \quad y_2 = 13$$
$$x_3 = 9, \quad y_3 = 15$$

bestimmt, so würde man als Gleichung der Parabel:

$$y = \frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{30}x + 12$$

und als Gleichung des Kreises finden:

$$y = \sqrt{x^2 + 144}$$

Abstrahirt man jetzt von der geometrischen Abkunft der beiden Gleichungen, so hat man in ihnen zwei verschiedene Funktionen, welche den oben aufgestellten Spezialwerthen genügen.

Um nun die Unbestimmtheit, welche in der allgemeinen Fassung des Problemes liegt, zu vermeiden, wollen wir letzteres beschränken, indem wir die gesuchte Funktion als eine algebraische ganze und rationale voraussetzen. Da die Auflösung unseres Problemes offenbar nur durch besondere Eigenschaften der algebraischen ganzen und rationalen Funktionen möglich ist, so haben wir zunächst über diese einige Betrachtungen anzustellen.

§. 21.

Wichtigste Eigenschaften der algebraischen, ganzen und rationalen Funktionen.

Wenn y eine algebraische ganze und rationale Funktion von x ist, so hat man bekanntlich nach der in §. 3. gegebenen Definition

(1) $$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n$$

worin die ganze positive Zahl n den Grad der Funktion angiebt. Man kann sich nun denken, dafs es einen speziellen Zahlenwerth von x, etwa x_1 genannt, geben könne, für welchen sich die ganze Funktion annullirt, d. h. $y = 0$ wird. In der That hätte man, um einen solchen Werth zu finden, weiter nichts zu thun, als

$$A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1x + A_0 = 0$$

zu setzen, hierin die bisher unbestimmte Gröfse x als Unbekannte anzusehen und diese algebraische Gleichung aufzulösen. Diefs würde zwar allgemein nicht mehr möglich sein, wenn die Gleichung von einem höheren als dem vierten Grade wäre, wäre aber wenigstens immer ausführbar, wenn die Werthe von A_n, A_{n-1}, ... A_1, A_0 in Zahlen gegeben sind. Gesetzt also, man habe auf irgend eine Weise, sei es nun durch Auflösung

der Gleichung oder durch Rathen und Probiren, einen solchen Werth x_1 gefunden, so hat man die Gleichung

$$0 = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2 + \ldots + A_n x_1^n.$$

Subtrahirt man dieselbe von (1), so ergiebt sich

$$(2) \qquad y = A_1(x - x_1) + A_2(x^2 - x_1^2) + \ldots + A_n(x^n - x_1^n).$$

Es ist aber ein bekannter Satz, dafs für jedes x und α die Differenz der $m$ten Potenzen $x^m - \alpha^m$, wobei m jede beliebige positive ganze Zahl bedeuten darf, durch die Differenz der Wurzeln $x - \alpha$ ohne Rest theilbar ist. Man findet nämlich durch Division

$$\frac{x^m - \alpha^m}{x - \alpha} = x^{m-1} + x^{m-2}\alpha + x^{m-3}\alpha^2 + \ldots + x\alpha^{m-2} + \alpha^{m-1}$$

wovon man sich auch rückwärts durch beiderseitige Multiplikation mit $x - \alpha$ überzeugen kann. Denken wir uns jetzt x_1 für α und der Reihe nach 1, 2, 3, ... n für m gesetzt, so bemerken wir, dafs in der Gleichung (2) jedes einzelne Glied durch $x - x_1$ ohne Rest theilbar ist. Es mufs folglich $x - x_1$ auch in der Summe jener Glieder, d. h. in y aufgehen. Ist also x_1 ein spezieller Zahlenwerth von x, durch welchen sich die Gleichung

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$$

auf Null reduzirt, so ist $x - x_1$ ein Faktor von y. Fände sich aufser dem erwähnten Werthe x_1 noch ein zweiter x_2, welcher $y = 0$ machte, so ginge auch $x - x_2$ in y auf, und da $x - x_1$ schon darin aufgeht, so mufs jetzt auch das Produkt $(x - x_1)(x - x_2)$ in y aufgehen. Fänden sich ferner n solcher verschiedener Werthe von x, also so viele, als der Grad der Funktion beträgt, die wir durch $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ bezeichnen wollen, so ginge nun auch das Produkt

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots\ldots (x - x_n)$$

in y auf. Der Quotient, welchen man erhält, wenn man mit diesem Produkt in y dividirt, mufs dann eine constante Gröfse sein, oder in Zeichen: für

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n}{(x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n)} = k$$

ist k von x unabhängig. Denn es folgt daraus

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$$
$$= k(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots\ldots (x - x_n)$$

und wenn man hier die angedeuteten Multiplikationen ausführte, so würde man, weil n Faktoren vorhanden sind, in deren jedem x einmal vorkommt, rechts eine algebraische ganze rationale Funktion von x bekommen. Wäre nun k von x abhängig, so würde durch Multiplikation mit k der Grad der Funktion rechts erhöht oder erniedrigt werden, und zwar

erhöht, wenn x in k mit positiven, erniedrigt, wenn es mit negativen Potenzen vorkäme. Es müfste also eine algebraische ganze rationale Funktion von x für alle möglichen Werthe dieser Veränderlichen einer zweiten solchen Funktion, aber von anderem Grade, gleich sein, was offenbar unmöglich ist.

In der That ist dieser Quotient k nichts Anderes als der Coefficient A_n der höchsten Potenz von x. Denkt man sich nämlich das Produkt $(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ ausgerechnet, so würde es mit x^n anfangen und dann ist nach dem Obigen

$$k = \frac{A_n x^n + \ldots + A_1 x + A_0}{x^n + \ldots \pm x_1 x_2 \ldots x_n}$$

Der Anfang der Division giebt nun zunächst den Quotienten A_n und da die Division aufgehen mufs, so ist A_n auch schon der vollständige Quotient und folglich $= k$.

Weifs man also von einer ganzen algebraischen rationalen Funktion, dafs sie vom Grade n ist, und dafs sie für n gegebene Werthe x_1, x_2, ... x_n verschwindet, so kann man setzen

(3) $$f(x) = k(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

wobei k eine constante Gröfse bedeutet.

Von diesem Theoreme werden wir nun sogleich eine Anwendung machen.

§. 22.

Das Interpolationsproblem.

Wir kehren jetzt zu der am Ende von §. 20. gestellten Aufgabe zurück, nach welcher uns obliegt, aus einer Reihe von Werthen einer Funktion, welche einer Reihe spezieller Werthe der Veränderlichen angehören, das allgemeine Gesetz abzuleiten, wonach diese entsprechenden Werthe zusammenhängen, vorausgesetzt, dafs dieser Zusammenhang durch eine algebraische ganze rationale Funktion ausgedrückt werde. Dieses Problem führt auch den Namen des Interpolationsproblemes, weil man durch seine Lösung in den Stand gesetzt wird, zwischen gegebenen Werthen einer Funktion andere einzuschalten, d. h. zu interpoliren.

Es sei also y diejenige noch unbekannte Funktion von x, welche für n gegebene spezielle Zahlenwerthe von x, nämlich x_1, x_2, x_3, ... x_n, die correspondirenden, ebenfalls gegebenen Zahlenwerthe y_1, y_2, y_3, ... y_n annehmen soll.

Wir können uns hier zuvörderst denken, dafs das y, welches zu einem beliebigen x gehört, aus aliquoten Theilen der schon gegebenen Werthe y_1, y_2, ... y_n zusammengesetzt sei. Setzen wir also

$$(4) \qquad y = q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3 + \cdots + q_n y_n$$

so haben wir es noch mit der Bestimmung von $q_1, q_2, \dots q_n$ als Funktionen von x zu thun. Da wir aber für y nur eine algebraische ganze rationale Funktion suchen, so brauchen wir auch $q_1, q_2, \dots q_n$ nur als solche Funktionen anzusehen, weil dann die Summe der Produkte $q_1 y_1$, $q_2 y_2, \dots q_n y_n$, in denen $y_1, y_2, \dots y_n$ constante Gröfsen sind, ebenfalls eine algebraische ganze rationale Funktion von x ist. Suchen wir nun die Bedingungen auf, welchen die Funktionen $q_1, q_2, \dots q_n$ unterworfen sind:

1) Für $x = x_1$ mufs $y = y_1$ herauskommen; es mufs also in diesem Falle $q_1 = 1$ und $q_2 - q_3 = q_4 \dots = q_n = 0$ sein.
2) Für $x = x_2$ soll $y = y_2$ werden; folglich ist für diesen Fall $q_2 = 1$, dagegen $q_1 = q_3 = q_4 \dots = q_n = 0$.
3) Für $x = x_3$ mufs $y = y_3$ zum Vorschein kommen; mithin wird $q_3 = 1$ und $q_1 = q_2 = q_4 = q_5 \dots = q_n = 0$.

Man übersieht leicht den Fortgang dieser Schlüsse, und kann ihn in folgendem Schema zusammenstellen:

x	q_1,	q_2,	q_3,	q_4,	.... q_n
x_1	1,	0,	0,	0,	 0
x_2	0,	1,	0,	0,	 0
x_3	0,	0,	1,	0,	 0
x_4	0,	0,	0,	1,	 0
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	
x_n	0,	0,	0,	0,	.... 1.

worin der einem x entsprechende Werth eines q gefunden werden kann, wenn man vom x horizontal und vom q vertikal fortschreitet, bis beide Wege zusammentreffen.

Bezeichnet nun q_r irgend eine von den Gröfsen $q_1, q_2, \dots q_n$, so lassen sich die Bedingungen, welchen dieses q_r unterworfen ist, so aussprechen:

Für $x = x_r$ mufs $q_r = 1$ werden, für jeden anderen Werth dagegen, also für

$$x = x_1, x_2, \dots x_{r-1}, x_{r+1}, \dots x_n$$

mufs es sich auf Null reduziren.

Diese letztere Eigenschaft wird uns vorzüglich zur Bestimmung der Form von q_r nützlich, weil wir unter der Voraussetzung, dafs q_r eine algebraische ganze rationale Funktion sei, nach Formel (3) nun setzen dürfen:

$$q_r = k(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{r-1})(x - x_{r+1}) \ldots (x - x_n)$$

worin k eine constante Gröfse bedeutet. Der Werth derselben läfst sich vermöge der Bedingung, dafs für $x = x_r$, $q_r = 1$ werden mufs, leicht bestimmen; es ist nämlich für $x = x_r$

$$1 = k(x_r - x_1)(x_r - x_2) \ldots (x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1}) \ldots (x_r - x_n).$$

Um aus diesen beiden Gleichungen k zu eliminiren, dividiren wir die erste durch die zweite und erhalten:

$$(5) \quad q_r = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{r-1})(x - x_{r+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_r - x_1)(x_r - x_2) \ldots (x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1}) \ldots (x_r - x_n)}$$

wodurch der Werth eines beliebigen q bestimmt ist. Setzt man diefs für $r = 1, 2, 3, \ldots n$ in die Formel (4), so ergiebt sich

$$(6) \quad y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \ldots (x_1 - x_n)} y_1$$
$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \ldots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \ldots (x_2 - x_n)} y_2$$
$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) \ldots (x - x_n)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) \ldots (x_3 - x_n)} y_3$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3) \ldots (x_n - x_{n-1})} y_n$$

ein unter dem Namen der Interpolationsformel von Lagrange bekannter Ausdruck.

Die algebraische Funktion y, welche man durch Anwendung dieser Formel erhält, ist vom Grade $n - 1$, weil jedes einzelne Glied $n - 1$ von x abhängige Faktoren enthält, in denen allen x als erste Potenz auftritt; der Grad der Funktion beträgt also eine Einheit weniger als die Anzahl der gegebenen speziellen Werthe derselben. Da nun hier die Funktion durch eine Partie von Werthen, deren Anzahl den Grad der Funktion um Eins übersteigt, vollkommen bestimmt ist, so kann man folgenden Satz aussprechen:

Geben zwei algebraische rationale Funktionen desselben Grades $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für eine Partie spezieller Werthe von x, welche $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ heifsen mögen, die nämlichen Resultate, ist also

$$\varphi(x_1) = \psi(x_1), \; \varphi(x_2) = \psi(x_2), \; \ldots \; \varphi(x_m) = \psi(x_m)$$

und zugleich die Anzahl m dieser Werthe um Eins gröfser, als der Grad der Funktionen, so sind diese überhaupt identisch, d. h. es ist dann für jedes x, $\varphi(x) = \psi(x)$.

Diefs gilt offenbar um so mehr, wenn die Anzahl der speziellen Werthe von x, für welche die Funktionen übereinstimmen, noch gröfser ist.

Dieser Satz kann mit vielem Nutzen gebraucht werden, wenn man die Identität zweier solchen Funktionen beweisen will, ohne sich mühsamen Reduktionen zu unterziehen. Kann man z. B. zeigen, dafs dieselben für alle möglichen ganzen positiven Werthe identisch sind, was oft sehr leicht ist, so wird hierdurch ihre Identität im Allgemeinen bewiesen.

Für $n = 3$ hat man speziell aus No. (6)

$$(7) \qquad y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3$$

mittelst welcher Formel man aus drei Werthen eine Funktion zweiten Grades bestimmt*). Verlangte man z. B. eine Funktion, welche für $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 5$ der Reihe nach gäbe: $y = 9$, $y = 3$, $y = 39$, so würde man setzen

$$y = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 5)}{\left(-1 - \frac{1}{2}\right)(-1 - 5)} \cdot 9 + \frac{(x + 1)(x - 5)}{\left(\frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2} - 5\right)} \cdot 3 + \frac{(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(5 + 1)\left(5 - \frac{1}{2}\right)} \cdot 39$$

woraus man nach gehöriger Reduktion findet

$$y = 2x^2 - 3x + 4.$$

Sind in Formel (6) $y_1 = y_2 = y_3 = \ldots = y_n = 1$, so ist die Funktion überhaupt eine Constante und für jedes x, $y = 1$. Man hat dann für jedes x die identische Gleichung:

$$1 = \frac{(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n)} + \frac{(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n)} + \ldots + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1})}$$

wovon man sich in speziellen Fällen durch wirkliche Ausführung der Rechnung leicht überzeugen kann.

*) Für die analytische Geometrie ist hiermit die Aufgabe gelöst, durch drei Punkte eine Parabel zu ziehen, deren Achse den y_1, y_2, y_3 parallel liegt.

Capitel VI.
Bestimmung der Natur unbekannter Funktionen aus gegebenen Eigenschaften derselben.

§. 23.
Form der hieher gehörenden Aufgaben.

Bereits im Anfange des vorigen Capitels wiesen wir darauf hin, dafs auch die Eigenschaften einer Funktion ein Mittel abgeben können, um die Funktion zu bestimmen. Aufgaben dieser Art zu stellen ist sehr leicht; man braucht nur irgend eine Eigenschaft einer schon bekannten Funktion hinzuschreiben, darauf die Bekanntschaft mit jener Funktion aufzugeben und umgekehrt zu fragen: welche Funktion ist es, der die genannte Eigenschaft zukommt? Wenn z. B. x und y beliebige unabhängige Variabele bedeuten, so gilt bekanntlich die Formel

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$$

und es spricht sich in ihr eine Eigenschaft des Cosinus aus; umgekehrt läfst sich hieraus die Aufgabe ableiten: diejenige Funktion zu bestimmen, welcher die Eigenschaft

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

zukommt. Die Auflösung dieses Problemes würde im vorliegenden Falle durch die Gleichung

$$f(z)=\cos z$$

gegeben sein, wo z eine willkührliche Variabele bezeichnet.

Aufgaben dieser Art können sogar zwei oder mehrere verschiedene Auflösungen zulassen, d. h. es kann mehrere verschiedene Funktionen geben, die irgend eine Eigenschaft gemeinschaftlich besitzen. Die ebenerwähnte Aufgabe z. B. besitzt aufser der Lösung $f(z)=\cos z$ noch eine zweite, nämlich

$$f(z)=\frac{1}{2}(a^z+a^{-z}),$$

worin a eine beliebige Constante bezeichnet; es würde daher zur völligen Bestimmung einer Funktion nicht hinreichen, wenn man sagte, sie besitze die Eigenschaft $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$.

Aus der unendlichen Menge von Aufgaben, die sich hier darbieten, heben wir die vier einfachsten und wichtigsten hervor; sie stellen sich dar in den Gleichungen

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$
$$f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$$
$$f(x) + f(y) = f(xy)$$
$$f(x) \cdot f(y) = f(xy)$$

in welchen die Operationen des Addirens und Multiplizirens bald auf die Funktionen, bald auf die in ihnen enthaltenen Veränderlichen angewendet sind.

§. 24.

Auflösung der Gleichung

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Wir wollen bei der Auflösung dieses Problems von den einfacheren zu den zusammengesetzteren Fällen fortschreiten und erst versuchen, ob sich die Natur der Funktion $f(x)$ nicht für ganze positive Werthe der Veränderlichen bestimmen läfst. Setzen wir zuvörderst $x = y = 1$, so findet sich $2f(1) = f(2)$; hierdurch haben wir die Kenntnifs von $f(2)$ erlangt, vorausgesetzt, dafs $f(1)$ bekannt ist. Dafs wir aber auf der rechten Seite $f(2)$ bekamen, lag daran, dafs dort zwei Veränderliche x und y vorhanden waren, die wir beide $= 1$ setzen konnten. Wäre es nun möglich, aus der Gleichung

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

andere abzuleiten, in denen stünde

$$f(x + y + z) = \dots$$
$$f(x + y + z + u) = \dots$$
$$f(x + y + z + u + t) = \dots$$
u. s. f.

d. h. wäre man im Stande, die Anzahl der Veränderlichen zu vergröfsern, so würde man dadurch, dafs man

$$x = y = z = u = t = \dots = 1$$

setzte, auch die Werthe von $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ u. s. f. bestimmen, also ausmitteln können, von welcher Form die Funktion $f(x)$ für den Fall eines ganzen positiven x wäre. — Dieser Gedanke ist nicht schwer auszuführen; setzt man nämlich in der ursprünglichen Gleichung $x = \alpha$, $y = \beta + z$, wo α, β, z wieder beliebige Gröfsen sind, so ergiebt sich

(1) $$f(\alpha + \beta + z) = f(\alpha) + f(\beta + z).$$

Die ursprüngliche Gleichung läfst sich aber unter einem doppelten Gesichtspunkte betrachten; einmal lehrt sie, die Summe zweier gleichgebildeten Funktionen $f(x)$ und $f(y)$ finden; andererseits aber zeigt sie auch, wie man die Funktion $f(x + y)$ in die Summe von $f(x)$ und $f(y)$ zerlegen könne. Wenden wir diefs auf das oben vorkommende $f(\beta + z)$

an, worin β und z gerade so beliebige Gröfsen sind, wie früher x und y, so ist auch $f(\beta + z) = f(\beta) + f(z)$; folglich wird jetzt aus (1)

$$f(\alpha + \beta + z) = f(\alpha) + f(\beta) + f(z).$$

Für $z = \gamma + u$ ergiebt sich hieraus

$$f(\alpha + \beta + \gamma + u) = f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma + u)$$

oder, wenn man $f(\gamma + u)$ nach der ursprünglichen Gleichung wieder in $f(\gamma) + f(u)$ zerlegt,

$$f(\alpha + \beta + \gamma + u) = f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(u).$$

Nähme man ferner $u = \delta + v$, so würde man unter Anwendung der nämlichen Zerlegung erhalten:

$$f(\alpha + \beta + \gamma + \delta + v) = f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(\delta) + f(v).$$

Man sieht auf der Stelle, dafs diese Betrachtung sich beliebig weit fortführen läfst und dafs man auf diese Weise eine beliebige Menge willkührlicher Gröfsen α, β, γ, ..: μ einführen könnte. Überhaupt ist nämlich für eine solche Partie Gröfsen:

(2) $$f(\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \mu) = f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + \ldots + f(\mu).$$

Da hier α, β, γ, ..: μ beliebige Gröfsen bedeuten, so können wir auch dieselben einander gleich und zwar der ersten gleich nehmen, d. i.

$$\beta = \gamma = \delta = \ldots = \mu \text{ und alle } = \alpha$$

setzen. Beträgt nun m die Anzahl der überhaupt vorhandenen Gröfsen, so geht die Gleichung (2) in die folgende über

(3) $$f(m\alpha) = mf(\alpha)$$

welche für jedes beliebige α, aber nur für beliebige ganze positive m gilt. Es lassen sich aus derselben mehrere sehr wichtige Folgerungen ziehen, je nachdem man dem willkührlichen α verschiedene Werthe giebt.

1) Nimmt man zuerst $\alpha = 1$, so wird

(4) $$f(m) = mf(1)$$

oder, wenn wir $f(1)$, welches einen gewissen constanten Werth haben wird, den wir nicht weiter untersuchen, kurz mit a bezeichnen,

(5) $$f(m) = am$$

d. h. wenn die Veränderliche x eine ganze positive Zahl ist, so ist $f(x) = ax$, also in diesem Falle die Natur der Funktion bestimmt.

2) In der Gleichung (3) nehmen wir jetzt α gleich einem positiven Bruche, gleichviel ob ächt oder unächt, also etwa $\alpha = \frac{p}{q}$. Hierbei können wir immer voraussetzen, dafs p und q ganze positive Zahlen sind, denn wenn auch Zähler und Nenner jenes Bruches selbst wieder Brüche sein sollten, so kann man ihn doch dadurch, dafs man Zähler und Nenner mit einer schicklich gewählten Zahl multiplizirt, auf jene Form bringen. Wir haben jetzt

$$f\left(m\frac{p}{q}\right) = m\,f\left(\frac{p}{q}\right)$$

Da aber m eine beliebige positive Zahl ist, so können wir auch $m = q$ werden lassen, wodurch sich ergiebt:

$$f(p) = q\,f\left(\frac{p}{q}\right)$$

also wenn man $f\left(\frac{p}{q}\right)$ als unbekannte Gröſse ansieht,

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f(p)}{q}.$$

Hier läſst sich aber, weil p eine positive ganze Zahl ist, $f(p)$ nach der vorhin gefundenen Regel bestimmen, nach welcher für jedes positive ganze x, $f(x) = ax$, mithin auch $f(p) = ap$ ist. Wir erhalten jetzt

(6) $$f\left(\frac{p}{q}\right) = a\frac{p}{q},$$

d. h. wenn die Veränderliche x ein positiver Bruch ist, so ist $f(x) = ax$.

Da nun jede positive rationale Gröſse entweder eine ganze Zahl, oder ein Bruch ist, so können wir, das Bisherige zusammenfassend, sagen: für jedes positive rationale x ist $f(x) = ax$.

Man sieht aber leicht, daſs diese Form auch für irrationale x richtig bleiben muſs. Denn da man sich irrationalen Zahlen durch rationale Brüche (Dezimalbrüche) ohne Ende nähern kann, und jene Form für alle jene Brüche besteht und nie zu bestehen aufhört, so muſs sie für Irrationalzahlen selbst gültig bleiben. Man kann also sagen: für jede positive Zahl x ist $f(x) = ax$.

Es würde sich nun noch darum handeln, die Form der Funktion $f(x)$ für negative x zu bestimmen. Diese Aufgabe läſst sich leicht auf eine andere reduziren. Setzt man nämlich in der ursprünglichen Gleichung

$$f(x) + f(y) = f(x+y)$$

das ganz beliebige $y = -x$, so wird

$$f(x) + f(-x) = f(x-x) = f(0)$$

d. h.

(7) $$f(-x) = f(0) - f(x).$$

Man würde also $f(-x)$ bestimmen können, wenn man den Werth von $f(0)$ auszumitteln wüſste. Dieſs kann aber vermittelst der Gleichung (6) leicht geschehen, wenn man p constant, etwa $= 1$ nimmt, q ins Unendliche wachsen läſst und zur Gränze für wachsende q übergeht. Es ist dann $Lim\,\frac{1}{q} = 0$ und man erhält

(8) $$f(0) = a \cdot 0 = 0$$

und jetzt aus (7)

(9) $$f(-x) = -ax = a(-x).$$

Fafst man alles Bisherige zusammen, so ergiebt sich das Theorem:

Diejenige Funktion von x, welche die Gleichung

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

erfüllt, ist

(10) $$f(x) = ax$$

wobei x jede mögliche Zahl bedeuten kann, und die Bedeutung der Constanten a durch die Gleichung

(11) $$a = f(1)$$

ausgesprochen ist.

Es zeigt sich hier, dafs es nur eine Funktion giebt, welche der obigen Gleichung Genüge leistet, oder mit anderen Worten, dafs jene Gleichung eine bestimmte Funktion charakterisirt. Sollte nämlich eine zweite Auflösung möglich sein, so müfste sie sich aus dem Gange der Untersuchung selbst ergeben haben, was z. B. dann hätte geschehen können, wenn man aus dem Werthe von $f(\alpha)$ den Werth von $f(m\alpha)$ auf verschiedene Weisen abgeleitet hätte. Da diefs aber nur auf einerlei Weise geht, so kamen wir für den Fall eines positiven ganzen x auch nur zu einer Auflösung und ebenso in den übrigen Fällen.

§. 25.

Auflösung der Gleichung
$f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$.

Wir können hier einen ganz ähnlichen Gedankengang verfolgen, wie im vorigen Paragraphen. Wir suchen nämlich zuerst die Form der Funktion für ganze positive Werthe der Veränderlichen zu bestimmen und führen defshalb in die Gleichung

(1) $$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

eine gröfsere Menge von veränderlichen Gröfsen ein. Setzen wir nämlich $x = \alpha$, $y = \beta + z$, so wird

$$f(\alpha + \beta + z) = f(\alpha) \cdot f(\beta + z).$$

Die Gleichung (1) lehrt aber nicht nur das Produkt zweier gleichgebildeten Funktionen in eine Funktion zusammenziehen, sondern sie zeigt auch, wie man eine Funktion von der Summe zweier Veränderlichen zerlegen könne. Wenden wir das Letztere hier an, so ergiebt sich

$$f(\alpha + \beta + z) = f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(z).$$

Für $z = \gamma + u$ erhält man hieraus unter Anwendung der nämlichen Zerlegung:

$$f(\alpha+\beta+\gamma+u) = f(\alpha)\,.\,f(\beta)\,.\,f(\gamma)\,.\,f(u).$$

Setzt man dieses Verfahren gleichmäfsig fort, so findet man für eine beliebige Anzahl veränderlicher Gröfsen α, β, γ, ... μ die Gleichung

(2) $$f(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu) = f(\alpha)\,.\,f(\beta)\,.\,f(\gamma)\,\ldots\,f(\mu).$$

Setzt man hier

$$\beta=\gamma=\delta=\ldots=\mu=\alpha$$

und nimmt man an, dafs dieser Gröfsen der Zahl nach m vorhanden sind, so erhält man auf der rechten Seite von (2) ein Produkt von m gleichen Faktoren, also überhaupt:

(3) $$f(m\alpha) = [f(\alpha)]^m$$

Für $\alpha = 1$ ergiebt sich hieraus zuvörderst

$$f(m) = [f(1)]^m$$

d. h. wenn der Kürze wegen $f(1)$ mit a bezeichnet wird, so ist für ganze positive x:

(4) $$f(x) = a^x.$$

Setzt man dagegen in der Gleichung (3) $\alpha =$ einem positiven Bruche $\frac{p}{q}$, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, so wird

$$f\left(m\frac{p}{q}\right) = \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^m.$$

Da hier aber m, p, q drei beliebige positive ganze Zahlen sind, so hindert nichts, $m = q$ zu nehmen, wodurch man erhält

$$f(p) = \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q$$

und wenn man hieraus durch Ausziehung der $q$ten Wurzel das unbekannte $f\left(\frac{p}{q}\right)$ sucht:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{f(p)}.$$

Nun ist aber $f(p)$ bekannt, weil man für alle positiven ganzen Werthe der Veränderlichen die Form der Funktion schon kennen gelernt hat. Gemäfs der Gleichung (4) ist nämlich $f(p) = a^p$, mithin

(5) $$f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}.$$

Wir haben also gleichförmig für alle positiven rationalen x

(6) $$f(x) = a^x.$$

Diefs mufs auch noch für positive irrationale x gelten, weil man sich ihnen durch rationale Brüche unbegränzt nähern kann und die Gleichung (5) nie zu gelten aufhört, wie grofs auch p und q sein mögen. Nimmt man in (5) p constant, etwa $= 1$, und läfst q ins Unendliche wachsen, so ist

$$Lim\, f\left(\frac{1}{q}\right) = Lim\, a^{\frac{1}{q}}$$

oder

(7) $$f(0) = a^0 = 1.$$

Mittelst dieser Gleichung lassen sich die Werthe von $f(-x)$ bestimmen. Für $y = -x$ erhält man nämlich aus der ursprünglichen Gleichung

$$f(x) \cdot f(-x) = f(0) = 1$$

also

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

d. h.

(8) $$f(-x) = \frac{1}{a^x} = a^{-x}.$$

Fassen wir nun alles Bisherige zusammen, so können wir sagen:

Diejenige Funktion von x, welche der Gleichung

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$$

Genüge leistet, ist

(9) $$f(x) = a^x$$

wobei x jede mögliche Zahl bezeichnen kann und die Bedeutung der Constanten a durch die Formel

(10) $$a = f(1)$$

gegeben wird.

Man könnte auch eine allgemeine Theorie der Potenzen auf die hier durchgeführte Untersuchung bauen. Man würde dann so anfangen müssen: Setzt man die Gröfse a als Faktor m mal, so wird diefs mit a^m bezeichnet. Demnach ist, wie früher, für ganze positive $x = m$, $f(m) = a^m$, für gebrochene $x = \frac{p}{q}$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}$, für ganze negative $x = -m$, $f(-m) = \frac{1}{a^m}$ und für negative gebrochene $x = -\frac{p}{q}$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$.

Um nun diese vier verschiedenen Formen derjenigen Funktion, welche die Gleichung $f(x)\, f(y) = f(x+y)$ erfüllt, unter eine einzige zu bringen, wollen wir $\sqrt[q]{a^p}$ mit $a^{\frac{p}{q}}$, $\frac{1}{a^m}$ mit a^{-m} und $\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$ mit $a^{-\frac{p}{q}}$ bezeichnen, und allgemein den Ausdruck a^x für jedes x eine Potenz nennen. Die Definition der Potenz lautet dann: „Potenz nennt man diejenige Funktion, welche die Gleichung $f(x)\, f(y) = f(x+y)$ befriedigt; für positive ganze x läfst sich dieselbe als ein Produkt gleicher Faktoren ansehen, für andere x aber treten die Interpretationen

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

ein.“ Bei einer solchen Behandlungsweise der Potenzenlehre, welche zuerst L. Crelle in seiner Theorie der Potenzen und Fakultäten ganz vortrefflich ausgeführt hat, lassen sich alle die Schwierigkeiten vermeiden, denen man sonst leicht begegnet.

§. 26.

Auflösung der Gleichung

$f(x) + f(y) = f(xy)$.

Um zuvörderst die Anzahl der Veränderlichen zu vermehren, setze man in der Gleichung

(1) $$f(xy) = f(x) + f(y)$$

α für x und βz für y, so ergiebt sich

$$f(\alpha\beta z) = f(\alpha) + f(\beta z)$$

oder, wenn man $f(\beta z)$ nach der Gleichung $f(xy)$ zerlegt,

$$f(\alpha\beta z) = f(\alpha) + f(\beta) + f(z).$$

Setzt man wieder γu für z, so erhält man durch abermalige Zerlegung rechts

$$f(\alpha\beta\gamma u) = f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(u).$$

Überhaupt gilt für die Veränderlichen α, β, γ, ... μ die Gleichung

(2) $$f(\alpha\beta\gamma \ldots \mu) = f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + \ldots + f(\mu).$$

Nimmt man die Gröfsen α, β, γ, ... μ einander gleich und gleich der ersten und bestimmt man, dafs die Anzahl der vorhandenen Gröfsen m sei, so wird

(3) $$f(\alpha^m) = m\,f(\alpha),$$

und diefs gilt für jedes beliebige α, aber nur für ganze positive m. Man kann aber hieraus eine andere Gleichung ableiten, in welcher auch der Exponent beliebig ist. Für $\alpha = a^{\frac{p}{q}}$, worin a eine beliebige constante Gröfse, p und q willkührliche ganze Zahlen bedeuten, erhält man nämlich

$$f\left(a^{m\frac{p}{q}}\right) = m\,f\left(a^{\frac{p}{q}}\right)$$

Da aber m, p und q beliebige ganze Zahlen sind, so darf man auch $m = q$ nehmen, wodurch sich die obige Gleichung in

$$f(a^p) = q\,f\left(a^{\frac{p}{q}}\right)$$

oder

$$f\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{1}{q}\,f(a^p)$$

verwandelt, worin der Werth von $f(a^p)$ sich aus (2) bestimmen läfst,

wenn man sich für die beliebige Gröfse α dort unser a und für jene ganze Zahl m unser p substituirt denkt. Es wird jetzt

(4) $$f(a^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q} f(a).$$

Da nun $\frac{p}{q}$ jede ganze, ächt oder unächt gebrochene rationale positive Gröfse bezeichnen kann und die vorstehende Gleichung offenbar auch für positive irrationale Zahlen gelten mufs, weil man sich diesen durch rationale Brüche ohne Ende nähern kann, so darf man jetzt sagen: für jede beliebige positive Gröfse μ ist

(5) $$f(a^{\mu}) = \mu f(a).$$

Nimmt man in der Gleichung (4) die Zahl p constant, etwa $= 1$, vergröfsert dagegen q ins Unendliche und geht zur Gränze für unendlich wachsende q über, so wird $Lim\, a^{\frac{1}{q}} = a^0 = 1$, folglich

(6) $$f(1) = 0.$$

Um noch zu erfahren, was $f(a^{-\mu})$ sei, nehme man in der ursprünglichen Gleichung

$$f(x) + f(y) = f(xy)$$

$x = a^{\mu}$ und $y = a^{-\mu}$; es ergiebt sich dann unter Benutzung des mit (6) bezeichneten Resultates:

$$f(a^{\mu}) + f(a^{-\mu}) = 0$$

folglich

(7) $$f(a^{-\mu}) = -f(a^{\mu}) = (-\mu) f(a).$$

Vergleicht man diefs mit (5), so heifst es jetzt: für jedes beliebige μ und ein willkührliches, aber constantes a ist

(8) $$f(a^{\mu}) = \mu f(a).$$

Um hieraus $f(x)$ abzuleiten, braucht man blos $a^{\mu} = x$ zu setzen, woraus folgt

$$\mu = log\, x,\; bas\, a.$$

Aufserdem wird $f(a)$ irgend einen constanten Werth haben, den wir mit k bezeichnen wollen; hiernach wird nun

(9) $$f(x) = k\, log\, x.$$

Diefs gilt nur so lange, als x eine positive Gröfse bedeutet; denn man mag eine positive Grundzahl a auf positive oder negative Potenzen erheben, so wird doch die Potenz selbst immer positiv; es ist also für positive a und beliebige μ die Potenz a^{μ}, d. i. x, immer positiv.

Wollte man aber a selbst negativ nehmen, so bekäme man bei stetiger Änderung des μ gar keine stetige Folge von Werthen für x; setzte

man z. B., $(-a)$ für a und liefse μ von 2 bis 1 gehen, so erhielte man der Reihe nach:

$$(-a)^2 = + a^2$$

. . . .

$$(-a)^{1+\frac{1}{2}} = (-a)\,(-a)^{\frac{1}{2}} = (-a)\,\sqrt{-a},\ \text{unmöglich}$$

$$(-a)^{1+\frac{1}{3}} = (-a)\,(-a)^{\frac{1}{3}} = (-a)\,\sqrt[3]{-a},\ \text{möglich}$$

$$(-a)^{1+\frac{1}{4}} = (-a)\,(-a)^{\frac{1}{4}} = (-a)\,\sqrt[4]{-a},\ \text{unmöglich}$$

. . . .

$$(-a)^1 = -a$$

also gar keine stetige Aufeinanderfolge in den Werthen von x. — Welche für negative x die Form der Funktion $f(x)$ in (9) sein möge, läfst sich mithin aus den bisherigen Betrachtungen nicht entscheiden; spätere Untersuchungen werden uns hierüber Aufschlufs verschaffen.

Diejenige Funktion also, welche die Gleichung

$$f(x) + f(y) = f(xy)$$

befriedigt, ist

(10) $$f(x) = k \log x$$

in welcher k eine beliebige Constante, x eine wesentlich positive Veränderliche bezeichnet.

§. 27.

Auflösung der Gleichung

$f(x) \cdot f(y) = f(xy)$.

Zur Vermehrung der Anzahl der Veränderlichen setzen wir α für x und βz für y, so dafs

(1) $$f(\alpha\beta z) = f(\alpha) \cdot f(\beta z)$$

wird und zerlegen hier $f(\beta z)$ in $f(\beta)\,f(z)$, wodurch die Gleichung

$$f(\alpha\beta z) = f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(z)$$

hervorgeht. Nimmt man hier $z = \gamma u$ und zerlegt $f(z)$, d. h. $f(\gamma u)$ wieder in $f(\gamma)\,f(u)$, so findet man weiter

$$f(\alpha\beta\gamma u) = f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(\gamma) \cdot f(u)$$

und überhaupt für eine beliebige Partie veränderlicher Gröfsen α, β, γ, . . . μ,

(2) $$f(\alpha\beta\gamma \ldots \mu) = f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(\gamma) \cdot \ldots \cdot f(\mu).$$

Daraus ergiebt sich für $\beta = \gamma = \delta = \ldots = \mu = \alpha$, vorausgesetzt, dafs die Anzahl der Veränderlichen m beträgt,

(3) $$f(\alpha^m) = [f(\alpha)]^m.$$

Diese Gleichung, welche für beliebige α, aber nur für ganze positive m gilt, läfst sich noch etwas verallgemeinern, wenn man setzt

$$\alpha = a^{\frac{p}{q}}$$

wo a eine willkührliche constante Gröfse, p und q beliebige ganze Zahlen bedeuten. Es wird nämlich:

$$f\left(\alpha^{m\frac{p}{q}}\right) = \left[f\left(a^{\frac{p}{q}}\right)\right]^m$$

welche Gleichung sich dadurch, dafs man von den drei beliebigen ganzen Zahlen m, p, q die erste der letzten gleich nimmt, in die einfachere verwandelt:

$$f(a^p) = \left[f\left(a^{\frac{p}{q}}\right)\right]^q$$

woraus folgt

$$f\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = [f(a^p)]^{\frac{1}{q}}$$

d. h. wenn man die Gleichung (3) in Anwendung bringt,

(4) $$f\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = [f(a)]^{\frac{p}{q}}.$$

Da $\frac{p}{q}$ jede rationale positive Gröfse bedeuten kann, so heifst diefs mit anderen Worten: für jedes positive rationale μ ist

(5) $$f(a^\mu) = [f(a)]^\mu$$

und diefs mufs auch noch für positive irrationale μ gelten, weil man sich diesen durch rationale Brüche unbegränzt nähern kann.

Läfst man in der Gleichung (4) für $p = 1$ den Nenner q ins Unendliche zunehmen und geht zur Gränze über, so findet sich, weil $Lim\ \frac{1}{q} = 0$ ist,

(6) $$f(a^0) = [f(a)]^0, \text{ d. h. } f(1) = 1.$$

Nimmt man ferner in der ursprünglichen Gleichung

$$f(x)\,f(y) = f(xy)$$

$x = a^\mu$ und $y = a^{-\mu}$, so wird

$$f(a^\mu)\,f(a^{-\mu}) = f(a^0) = 1$$

folglich

$$f(a^{-\mu}) = \frac{1}{f(a^\mu)}$$

d. h. nach (5)

$$f(a^{-\mu}) = \frac{1}{[f(a)]^\mu} = [f(a)]^{(-\mu)}.$$

Durch Vergleichung mit dem Resultate in (5) ergiebt sich nun der Satz: für jedes beliebige μ ist

(7) $$f(a^\mu) = [f(a)]^\mu.$$

Um hieraus $f(x)$ zu bestimmen, braucht man blos $a^{\mu} = x$ zu setzen, woraus

$$\mu = log\, x,\ bas\ a$$

folgt. Es ist also:

$$f(x) = [f(a)]^{log\, x}.$$

Man hat aber überhaupt für jedes b und x

(8)*) $$b^{log\, x} = x^{log\, b}$$

folglich hier

$$f(x) = x^{log\, f(a)}$$

oder, wenn man die Constante $log\, f(a)$ mit k bezeichnet,

(9) $$f(x) = x^k,$$

wobei x wieder blos positive Werthe haben kann, weil es, wie im vorigen Paragraphen, $= a^{\mu}$ war.

Diejenige Funktion also, welche die Gleichung

$$f(x) \,.\, f(y) = f(xy)$$

befriedigt, ist

(10) $$f(x) = x^k$$

wobei k eine willkührliche Constante, x eine wesentlich positive Veränderliche bezeichnet.

Capitel VII.

Die unendlichen Reihen.

§. 28.

Entstehung der unendlichen Reihen.

Schon in §. 5. haben wir ein Beispiel von der Zerlegung einer Zahl in eine unendliche Menge immer kleiner werdender Theile kennen gelernt; dort stand dasselbe, um den Begriff der Gränze zu erläutern, hier kommen wir auf dasselbe zurück, um weitere Betrachtungen daran zu knüpfen.

Man sieht leicht ein, dafs eine und dieselbe Gröfse auf sehr verschiedene Weise in Theile zerlegt werden kann, je nachdem man das eine oder das andere Gesetz der Theilung zu Grunde legt. So hatten wir in §. 5. die Zerlegung der Einheit durch fortgesetzte Halbirung bewerkstel-

*) Der Beweis hiervon lautet so: Für a als Basis ist $b = a^{log\, b}$, also $b^{log\, x} = (a^{log\, b})^{log\, x} = a^{log\, b\, .\, log\, x} = a^{log\, x\, .\, log\, b} = (a^{log\, x})^{log\, b} = x^{log\, b}$.

ligt, man würde aber ebenso leicht nach Drittheilen, Viertheilen etc. zerlegen können. Theilt man z. B. eine Linie AB in drei gleiche Theile und nimmt $AM = \frac{2}{3} AB$ (die Figur wird man leicht hierzu entwerfen können), so bleibt noch $MB = \frac{1}{3} AB$ übrig; dieses wird wiederum in drei gleiche Theile getheilt und zwei davon werden zu AM gethan, man erhält dann $\frac{2}{3} AB + \frac{2}{3} MB = \frac{2}{3} AB + \frac{2}{9} AB$ und es bleibt $\frac{1}{9} AB$ übrig; verfährt man hiermit ebenso und setzt diese Theilungsweise ins Unendliche fort, so erhält man

$$\frac{2}{3} AB + \frac{2}{9} AB + \frac{2}{27} AB + \frac{2}{81} AB + \ldots$$

da man sich hierdurch der ganzen Linie AB unbegränzt nähert, so ist jetzt

$$AB = \frac{2}{3} AB + \frac{2}{9} AB + \frac{2}{27} AB + \ldots$$

oder nach Division mit $2AB$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$$

$$= \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots$$

Auf ganz gleiche Weise würde man durch fortgesetzte Theilung der Linie AB in vier gleiche Theile finden

$$AB = \frac{3}{4} AB + \frac{3}{16} AB + \frac{3}{64} AB + \ldots$$

oder durch Division mit $3 AB$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots$$

Zu diesen Summen einer unendlichen Menge von Theilen sind wir hier dadurch gekommen, dafs wir vorher eine endliche bestimmte Gröfse in ihre Theile zerlegten und sie dann aus diesen Theilen wieder zusammensetzten. Aber es könnte wohl umgekehrt die Aufgabe so gestellt werden, dafs nur die einzelnen Theile gegeben würden mit der Forderung, ihre Summe zu finden, wie z. B. wenn man nach der Summe von

$$\frac{1}{5^1} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \ldots$$

fragte. Hier würde uns der bisherige Weg wenig nützen, wenn man sich nicht aufs Probiren legen wollte, um durch eine geschickte Zerlegung einer passend gewählten Gröfse die vorgelegte Reihe zu erzeugen. — Um aber nicht bei so speziellen Fällen stehen zu bleiben, wollen wir vor-

erst die Aufgabe mit der nöthigen Schärfe und in der gehörigen Allgemeinheit auffassen.

Wenn die gegebenen Summanden, die wir immer mit $u_0, u_1, u_2, \ldots$ bezeichnen wollen, nicht in irgend einer gesetzmäfsigen Weise gebildet wären, sondern regellos fortlaufende Zahlen bildeten (z. B. 6, 11, 5, 9, 7, 50, ...), so würde es schon gar keinen Sinn haben, nach der Summe einer unendlichen Menge derartiger Summanden zu fragen, weil man nicht wüfste, wie jene Zahlenreihe fortginge, also auch die nicht geradezu hingeschriebenen Summanden gar nicht bekannt wären. Wir müssen daher zunächst voraussetzen, dafs die zu summirenden Zahlen nach einem gewissen Gesetze gebildet sind, demzufolge es möglich ist, so viel Summanden, als man will, wirklich zu entwickeln. Gesetzmäfsige Reihen wären z. B.

$$x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3,\ \ldots$$

$$1,\ \cos z,\ \cos 2z,\ \cos 3z,\ \ldots$$

und man wird ohne Mühe das Bildungsgesetz derselben übersehen. Nennen wir die einzelnen Summanden

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots$$

die Glieder der Reihe und die angehangenen Zahlen 0, 1, 2, 3, ... die Indices oder Stellenzeiger derselben, so mufs es also möglich sein, zu jedem beliebigen Index das zugehörige Glied zu bestimmen; in den oben gegebenen Beispielen ist z. B. das eine Mal $u_n = x^n$, das andere Mal $u_n = \cos nz$. In sofern u_n irgend eines der Reihenglieder bezeichnet, kann man u_n das allgemeine Glied der Reihe nennen und es läfst sich dasselbe wegen der postulirten Gesetzmäfsigkeit der Reihe jederzeit als eine Funktion seines Index ansehen.

Nachdem wir erörtert haben, welche Art von Reihen überhaupt betrachtet werden soll, liegt uns nun zweitens die Beantwortung der Frage ob, was man sich unter der Summe einer unendlichen Reihe zu denken habe. Diese Frage ist um so weniger überflüssig, als die Arithmetik den Begriff der Summe nur für den Fall einer endlichen Anzahl von Summanden erörtert; dafs man aber eine Definition, welche nur für einen beschränkten Fall gilt, nicht ohne Weiteres verallgemeinern dürfe, versteht sich von selbst. Sowie nun die unendliche Zahlenreihe nichts weiter als die unbegränzte Erweiterung der ursprünglich nicht gerade auf das Unendliche berechneten beschränkteren Zahlenreihe ist, so können wir uns auch die unendliche Reihe $u_0, u_1, u_2, \ldots$ nur dadurch entstanden denken, dafs in einer vorerst begränzten Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_{n-1}$$

die Gliederzahl n fortwährend zugenommen hat, und demgemäfs hat auch

die Summe einer unendlichen Reihe nur in so fern einen klaren Sinn, als man sie aus der endlichen Summe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}$$

hervorgehen läfst. Die vorliegende Summe ist nun offenbar eine Funktion von n, da sie sich mit n zugleich ändert; bezeichnen wir sie mit S_n, und lassen jetzt in der Gleichung

(1) $$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

die Gliederzahl unendlich wachsen, so folgt

(2) $$Lim\, S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots \textit{ in inf.}$$

und der auf der linken Seite stehende Gränzwerth ist es nun, was wir die Summe der unendlichen Reihe rechter Hand nennen.

Um hierzu ein Beispiel zu haben, betrachten wir die Reihe

(3) $$x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$$

worin x eine positive Gröfse bezeichnen möge. Nehmen wir vorerst n Glieder, so ist

(4) $$S_n = x^0 + x^1 + x^2 + \dots + x^{n-1}$$

d. i. nach einer bekannten Formel

(5) $$S_n = \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} \cdot x^n$$

wobei jedoch vorausgesetzt wird, dafs x von der Einheit verschieden sei; für $x = 1$ hätte man dagegen unmittelbar

(6) $$S_n = n.$$

Um nun die Gränze zu bestimmen, welcher sich S_n für unendlich wachsende n nähert, müssen wir die drei Fälle $x < 1$, $x = 1$, $x > 1$ unterscheiden; unter der ersten Voraussetzung nähert sich x^n der Gränze Null und folglich ist nach No. (5) $Lim\, S_n = \frac{1}{1 - x}$ und mithin

(7) $$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$
$$x < 1$$

Für $x = 1$ dagegen wird nach No. (6) $Lim\, S_n = \infty$ und ebenso für $x > 1$, $Lim\, S_n = \infty$, weil in diesem Falle x^n mit n gleichzeitig ins Unendliche zunimmt; man hat daher

(8) $$\infty = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$
$$x \geqq 1$$

und die Formeln (7) und (8) geben nun in jedem Falle die Summe der Reihe $1 + x + x^2 +$ etc.

§. 29.

Die Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen.

Den vorhin aufgestellten Begriffen zufolge verstehen wir unter der Summe einer unendlichen Reihe den Gränzwerth, welchem man sich nähert, sobald mehr und mehr Glieder der Reihe vereinigt werden; hierbei entsteht aber die Frage, ob ein solcher Gränzwerth immer existiren müsse. Es ist sehr leicht zu sehen, dafs diefs nicht immer der Fall sein wird, da es unzählige Funktionen geben kann, welche sich bei unendlich wachsenden n keiner bestimmten Gränze nähern. So haben wir schon in No. (8) des vorigen Paragraphen ein Beispiel gesehen, bei welchem die Summe der Reihe keine endliche bestimmte Gröfse war, aber es können Fälle vorkommen, bei denen die Summe noch weniger angebbar ist als dort; die Reihe z. E.

$$a - a + a - a + a - \ldots$$

hat überhaupt gar keine Summe, denn durch Vereinigung der auf einanderfolgenden Glieder erhält man wechselsweis a und 0, oder es ist

$$S_n = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2} a$$

und diefs nähert sich gar keiner Gränze; ebenso verhält sich die Sache bei der Reihe

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$$

deren Summe immer gröfser wird, aber wechselsweis positiv und negativ ausfällt, nämlich

$$S_n = (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{4} + \frac{1}{4}$$

wovon sich die Gränze nicht angeben läfst.

Wir müssen demnach die unendlichen Reihen in zwei Klassen theilen, in solche, deren Summe eine endliche bestimmte Gröfse ist, und in solche, deren Summe nicht angegeben werden kann, sei es nun, dafs letztere unendlich grofs ist oder dafs sie unbestimmt bleibt. Reihen der ersten Art heifsen convergent, die der zweiten divergent, und man kann daher, an dem Begriffe der Summe streng festhaltend, sagen: convergente Reihen sind immer summirbar, divergente Reihen dagegen besitzen keine Summe.

Wenn nun eine Reihe mit der Forderung vorgelegt würde, die Summe derselben zu ermitteln, so ist es das Natürlichste, erst die Vorfrage zu stellen, ob eine solche Summe überhaupt existire, weil man aufserdem Gefahr liefe, viel Zeit und Mühe an die Auffindung einer Gröfse zu verschwenden, die nirgends zu finden ist. Diese Vorfrage liefse sich nur in

dem Falle ersparen, wo man die Summe der n ersten Reihenglieder ermitteln könnte, denn es würde sich nachher beim unendlichen Wachsen der Zahl n von selbst ausweisen, ob die Reihe eine Summe hat oder nicht, und zugleich würde man im ersten Falle den Betrag derselben erfahren, wie in dem Beispiele am Ende des vorigen Paragraphen. Unglücklicherweise ist aber dieses so nahe liegende Verfahren nur selten anwendbar und es wird sich im Verlaufe unserer späteren Untersuchungen zeigen, dafs es sehr häufig leicht ist, eine Summenformel für eine unendliche Reihe aufzustellen, während es sehr schwer sein würde, eine Formel für die n ersten Glieder derselben zu entwickeln. Wir müssen daher an die Aufsuchung von Kennzeichen gehen, nach denen sich die Convergenz oder Divergenz einer gegebenen Reihe im voraus beurtheilen läfst.

Eines dieser Kennzeichen ist nun sehr leicht zu bemerken; es besteht darin, dafs jedes Glied der Reihe

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$$

gröfser als sein Nachfolger sein und dafs diese Abnahme ins Unendliche fortgehen mufs. Denn wären alle Reihenglieder gröfser als eine angebbare Gröfse ε, so hätte man bei positiven Gliedern

$$\begin{aligned} & u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \\ & > \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \ldots \\ & > \varepsilon\,(1 + 1 + 1 + 1 + \ldots) \end{aligned}$$

und wie klein nun auch ε sein möge, so kann man das Produkt $\varepsilon\,(1 + 1 + 1 + \ldots)$ gröfser als jede beliebige Zahl machen; es würde also die Summe der gegebenen Reihe jede angebbare Zahl übersteigen und mithin die Reihe selbst divergent sein.

Wenn nun auch die ebengenannte Bedingung nothwendig ist, so erweist sie sich, wenigstens bei lauter positiven Reihengliedern, doch nicht als hinreichend, wie man leicht an Beispielen sehen kann. Für $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{\sqrt{1}}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ etc. hat man zwar

$$Lim\, u_n = Lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

aber gleichwohl divergirt die unendliche Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

Denn bezeichnen wir mit S_n die Summe ihrer n ersten Glieder, so ist

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &> \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

d. i.

$$S_n > n\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{oder} \quad S_n = \sqrt{n}$$

und hieraus folgt, dafs S_n ins Unendliche wächst, wenn die Gliederzahl n unbegränzt zunimmt. Beispiele dieser Art, deren Zahl sich leicht vermehren liefse, weisen darauf hin, dafs es zur Convergenz einer Reihe noch anderer Bedingungen bedarf, als der unendlichen Abnahme der Reihenglieder.

Um diese Bedingungen zunächst für solche Reihen, die nur positive Glieder besitzen, zu entwickeln, halten wir uns an folgendes unmittelbar klare Princip: „wenn die beiden Reihen

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots$$

und

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

aus nur positiven Gliedern bestehen und man schon weifs, dafs die erste derselben convergirt, so convergirt die zweite ebenfalls und zwar stärker, wenn

$$u_0 < t_0, \quad u_1 < t_1, \quad u_2 < t_2 \text{ etc.}$$

divergirt dagegen die erste, so ist diefs um so mehr mit der zweiten der Fall, wenn die Ungleichungen

$$u_0 > t_0, \quad u_1 > t_1, \quad u_2 > t_2 \text{ etc.}$$

statt finden.“ So erkennt man z. B. augenblicklich die Convergenz der Reihe

$$\frac{1}{2^1+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \dots$$

weil ihre Glieder kleiner sind als die der folgenden

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

welche convergirt und die Einheit zur Summe hat.

Das soeben aufgestellte Prinzip ist noch einer Erweiterung fähig, wenn man bemerkt, dafs eine convergente unendliche Reihe und eine endliche Reihe zusammen wieder eine convergente Reihe bilden, und dafs ebenso eine divergente Reihe mit einer endlichen Reihe vereinigt eine divergente Reihe giebt. Wäre nämlich, wenn auch nicht von Anfang an, $u_0 < t_0$, $u_1 < t_1$ etc., so doch, wenigstens von einer bestimmten angebbaren Stelle an,

$$u_m < t_m, \quad u_{m+1} < t_{m+1}, \quad u_{m+2} < t_{m+2}, \quad \dots$$

so convergirt die Reihe

$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \dots$$

wenn dasselbe mit der Reihe

$$t_m + t_{m+1} + t_{m+2} + \cdots$$

der Fall ist, und wenn man die endliche Summe von $u_m + u_{m+1} +$ etc. mit der endlichen Reihe $u_0 + u_1 + \ldots + u_{m-1}$ vereinigt, so folgt, dafs jetzt auch die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{m-1} + u_m + u_{m+1} + \cdots$$

convergent ist. Ebenso leicht kann man sich überzeugen, dafs diese Reihe divergirt, wenn von einer gewissen Stelle an $u_m > t_m$, $u_{m+1} > t_{m+1}$ etc. und die Reihe $t_m + t_{m+1} +$ etc. eine divergente ist.

Zu einer anderen für die Anwendung bequemeren Ausdrucksweise dieses Prinzipes der Reihenvergleichung gelangt man durch folgende Schlüsse. Es sei

(1) $$\frac{t_{m+1}}{t_m} = \lambda_1, \quad \frac{t_{m+2}}{t_{m+1}} = \lambda_2, \quad \frac{t_{m+3}}{t_{m+2}} = \lambda_3, \quad \ldots$$

so findet man sehr leicht

$$\begin{aligned} t_{m+1} &= t_m \cdot \lambda_1 \\ t_{m+2} &= t_{m+1} \cdot \lambda_2 = t_m \cdot \lambda_1 \lambda_2 \\ t_{m+3} &= t_{m+2} \cdot \lambda_3 = t_m \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned}$$

u. s. w.

mithin

(2) $$\begin{aligned} & t_m + t_{m+1} + t_{m+2} + t_{m+3} + \cdots \\ = & t_m (1 + \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \ldots) \end{aligned}$$

Bezeichnet man entsprechend wie folgt

(3) $$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \mu_1, \quad \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} = \mu_2, \quad \frac{u_{m+3}}{u_{m+2}} = \mu_3, \quad \ldots$$

so ergiebt sich durch dieselben Schlüsse wie vorhin

(4) $$\begin{aligned} & u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots \\ = & u_m (1 + \mu_1 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_2\mu_3 + \ldots) \end{aligned}$$

Wenn nun zwischen den mit μ und λ bezeichneten Quotienten folgende Beziehungen statt finden:

$$\mu_1 < \lambda_1, \quad \mu_2 < \lambda_2, \quad \mu_3 < \lambda_3, \quad \ldots$$

so ist auch $\mu_1\mu_2 < \lambda_1\lambda_2$, $\mu_1\mu_2\mu_3 < \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ u. s. f., ferner

$$\begin{aligned} & 1 + \mu_1 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_2\mu_3 + \cdots \\ < & 1 + \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \cdots \end{aligned}$$

d. i. vermöge der Gleichungen (2) und (4)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u_m}(u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots) \\ < & \frac{1}{t_m}(t_m + t_{m+1} + t_{m+2} + t_{m+3} + \ldots) \end{aligned}$$

oder durch beiderseitige Multiplikation mit u_m

$$(6)\qquad u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots$$
$$< \frac{u_m}{t_m}(t_m + t_{m+1} + t_{m+2} + t_{m+3} + \cdots)$$

Wenn nun die Reihe $t_0 + t_1 + t_2 +$ etc. convergirt, so ist die Summe von $t_m + t_{m+1} + t_{m+2} +$ etc. eine endliche Gröfse, und da jetzt rechter Hand in der obigen Ungleichung eine endliche Gröfse steht, so mufs die Summe von $u_m + u_{m+1} + u_{m+2} +$ etc. ebenfalls endlich sein; dasselbe gilt dann auch von der Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$, welche also unter den gemachten Voraussetzungen convergirt. Setzt man für die Gröfsen x und μ ihre Werthe aus (1) und (3), so gehen die Ungleichungen (5) in die folgenden über:

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{t_{m+1}}{t_m},\quad \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} < \frac{t_{m+2}}{t_{m+1}},\ \text{etc.}$$

und es läfst sich nunmehr folgendes Theorem aufstellen:

Aus der Convergenz der Reihe
$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots$$
folgt die Convergenz der anderweiten Reihe
$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$
sobald der Quotient $u_{n+1} : u_n$ von irgend einer bestimmten Stelle an kleiner bleibt als der entsprechende Quotient $t_{n+1} : t_n$.

Durch ganz ähnliche Schlüsse wie vorhin überzeugt man sich von der Richtigkeit des analogen Satzes:

Aus der Divergenz der Reihe
$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots$$
folgt die Divergenz der anderweiten Reihe
$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$
sobald der Quotient $u_{n+1} : u_n$ von irgend einer bestimmten Stelle an gröfser bleibt als der entsprechende Quotient $t_{n+1} : t_n$.

Von diesem wichtigen Doppelsatze wollen wir nun die hauptsächlichsten Anwendungen vornehmen; sie bestehen darin, dafs wir die gegebene Reihe
$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$
mit solchen Reihen vergleichen, deren Convergenz oder Divergenz bereits entschieden ist.

§. 30.

Vergleichung einer beliebigen Reihe mit der geometrischen Progression.

Von derjenigen Reihe, welche entsteht, wenn man eine geometrische Progression ins Unendliche fortsetzt, nämlich

$$(1)\qquad 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

kennen wir nach §. 28. bereits die Bedingungen der Convergenz oder Divergenz: jene findet für $x < 1$, diese für $x \geqq 1$ statt. Wenden wir das am Ende des vorigen Paragraphen entwickelte Theorem hier an, indem wir die Reihe (1) an die Stelle der dortigen Reihe t_0, t_1, t_2 etc. setzen, so ist $t_{n+1} : t_n = x^{n+1} : x^n = x$ und folglich convergirt die Reihe

(2) $$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

wenn von einer bestimmten Stelle an die Beziehung

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < x$$

statt findet und zugleich die Reihe (1) convergirt, d. h. $x < 1$ ist; die Convergenz der Reihe (2) wird also durch die Bedingung

(3) $$\frac{u_{m+1}}{u_m} < 1$$

bestimmt. Wenn dagegen die Ungleichung

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} > x$$

erfüllt und zugleich die Reihe (1) divergent, also $x \geqq 1$ ist, so divergirt die Reihe (2), und demnach gilt für die Divergenz die Bedingung

(4) $$\frac{u_{m+1}}{u_m} > 1$$

Das in dem Bisherigen liegende Kennzeichen, demzufolge die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc. convergirt oder divergirt, je nachdem der Quotient $u_{n+1} : u_n$ von einer gewissen Stelle ($n = m$) an kleiner oder gröfser als die Einheit bleibt, läfst sich aber in einer noch besseren Form aussprechen. Heifst nämlich k der Gränzwerth von $u_{n+1} : u_n$ für unendlich wachsende n, ist also

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$$

so kann man für irgend ein endliches n die Gleichung

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = k \pm \delta$$

aufstellen, in welcher die Gröfse δ ihrem genauen Betrage nach nicht weiter bekannt ist, von der man aber Das wenigstens weifs, dafs sie bei unendlich wachsenden n bis zur Null abnimmt, die man also durch hinreichende Vergröfserung des n der Null beliebig nahe bringen kann.

Ist nun erstens $k < 1$, so mufs sich immer ein Werth m von n finden lassen so grofs, dafs $\delta < 1 - k$ oder $k + \delta < 1$ ausfällt und es von nun an auch bleibt, weil δ bei wachsenden n, also für $n = m$, $m + 1$, $m + 2$ etc. abnimmt. Für $k < 1$ giebt es demnach immer eine Stelle $n = m$, von welcher ab der Quotient $(u_{n+1} : u_n) = k + \delta$ kleiner bleibt

als die Einheit. Wenn dagegen $k > 1$, so mufs sich ein Werth m von n finden lassen, für welchen $\delta < k - 1$ oder $k - \delta > 1$ wird und bleibt; es giebt daher für $k > 1$ eine Stelle $n = m$, von welcher ab der Quotient $(u_{n+1} : u_n) = k - \delta$ immer die Einheit übersteigt. Diesen Bemerkungen zufolge und mit Rücksicht auf das Vorige gilt nun nachstehender Satz:

Die unendliche aus nur positiven Gliedern bestehende Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

convergirt oder divergirt, je nachdem

$$Lim\,\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \text{oder} \quad Lim\,\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

ist, wobei der erste Fall der Convergenz, der zweite der Divergenz entspricht.

Einige Anwendungen dieses Theoremes sind folgende.

I. Wäre die Convergenz oder Divergenz der Reihe

$$(5) \qquad \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

zu entscheiden, so ist $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{x}{1}$, $u_2 = \frac{x^2}{2}$ etc., mithin

$$u_n = \frac{x^n}{n}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

folglich

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1}x = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}x$$

und hieraus findet sich durch Übergang zur Gränze für unendlich wachsende n

$$Lim\,\frac{u_{n+1}}{u_n} = x$$

Die in No. (5) verzeichnete Reihe convergirt demnach für $x < 1$ und divergirt für $x > 1$.

II. Für die ähnlich gebildete Reihe

$$(6) \qquad 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$$

ist

$$Lim\,\frac{u_{n+1}}{u_n} = Lim\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)x\right] = x$$

und also convergirt die Reihe (6) mit der vorhin betrachteten unter ganz denselben Bedingungen.

III. Für die Reihe

$$(7) \qquad 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

ist

$$u_n = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n(n+1)}$$

mithin

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = Lim \frac{x}{n+1} = 0$$

für jedes endliche x; die Reihe (7) convergirt daher für jedes endliche bestimmte x. Es ist nicht überflüssig, diese Behauptung noch auf andere Weise zu rechtfertigen, weil es für den ersten Anblick scheinen könnte, als divergirte die Reihe unter Umständen, für $x = 10$ z. B. erhielte man

$$1 + 10 + 50 + \frac{500}{3} + \ldots$$

und hier nehmen die Glieder allerdings zu; daſs aber früher oder später doch wieder Convergenz eintritt, geben folgende Schlüsse zu erkennen.

Wenn $m > p + 1$, wo p eine beliebige Gröſse bezeichnet, so ist auch $mp > p^2 + p$ und

$$mp + m > p^2 + p + m$$
$$mp + m - p^2 - p > m$$

d. i.

$$(p + 1)(m - p) > m$$

Mit Rücksicht auf diesen Satz lassen sich für $p = 0, 1, 2, 3, \ldots (m-1)$ folgende Beziehungen aufstellen:

$$\begin{aligned} 1 \cdot m &= m \\ 2(m-1) &> m \\ 3(m-2) &> m \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\; &\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (m-1)2 &> m \\ m \cdot 1 &= m \end{aligned}$$

deren Multiplikation zu der Ungleichung führt

$$1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \ldots m^2 > m^m$$

oder

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m > (\sqrt{m})^m$$

hieraus folgt nun weiter

$$\frac{x^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} < \frac{x^m}{(\sqrt{m})^m} < \left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right)^m$$

Wählen wir die willkührliche ganze Zahl m so, daſs $\sqrt{m} > x$ oder $m > x^2$ ist und zerlegen die Reihe (7) wie folgt:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)}$$
$$+ \frac{x^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} + \frac{x^{m+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m+1)} + \frac{x^{m+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m+2)} + \cdots$$

so ist der erste Theil eine endliche Reihe, also ihre Summe von endlicher Gröfse, der zweite Theil beträgt nach dem Vorigen weniger als

$$\left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right)^m + \left(\frac{x}{\sqrt{m+1}}\right)^{m+1} + \left(\frac{x}{\sqrt{m+2}}\right)^{m+2} + \dots$$
$$< \left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right)^m + \left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right)^{m+1} + \left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right)^{m+2} + \dots$$

d. h. weniger als die Summe einer geometrischen Progression, die nach Potenzen des ächten Bruches $\frac{x}{\sqrt{m}}$ fortschreitet. Sobald also in der Reihe (7) ein Glied u_m erscheint, in welchem $m > x^2$ ist, so findet von hier ab eine stärkere Convergenz als in der geometrischen Progression statt.

IV. Sowie die eben betrachtete Reihe jederzeit convergirte, so divergirt immer die folgende:

(8) $$1 + 1x + 1 \, . \, 2x^2 + 1 \, . \, 2 \, . \, 3x^3 + \dots$$

Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder ist nämlich

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \dots n(n+1) x^{n+1}}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \dots n x^n} = (n+1) x$$

und der Gränzwerth hiervon unendlich für jedes von Null verschiedene x; für $x = 0$ dagegen würde sich die Reihe auf die blofse 1 reduziren. Wenn also die Reihe überhaupt vorhanden ist, so divergirt sie und zwar stärker als eine geometrische Progression; denn man hat nach dem Früheren

$$1 \, . \, 2 \, . \, 3 \dots m x^m > (x \sqrt{m})^m$$

sobald nun $x\sqrt{m}$ gröfser als die Einheit geworden ist, divergirt die Reihe stärker als folgende:

$$(x\sqrt{n})^n + (x\sqrt{n})^{n+1} + (x\sqrt{n})^{n+2} + \dots$$

wie man durch eine der vorigen ganz ähnliche Betrachtung leicht findet.

Die gegebenen Beispiele lassen erkennen, dafs die aufgestellte Regel zu einer sicheren Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz einer vorgelegten Reihe führt, sobald der Gränzwerth des Quotienten zweier Nachbarglieder weniger oder mehr als die Einheit beträgt. Es kann nun aber der Fall eintreten, dafs jener Gränzwerth der Einheit gleich ist und dann liefert die in Rede stehende Regel keine Entscheidung mehr, denn der Nerv ihres Beweises liegt darin, dafs von einer Stelle $n = m$ ab der Quotient $u_{n+1} : u_n$ unter oder über der Einheit bleiben mufs, was natürlich nicht mehr statt findet, wenn jener Quotient bei unendlich wachsenden n selbst in die Einheit als Gränze übergeht. Wir haben uns daher nach weiteren Criterien der Convergenz und Divergenz umzusehen.

§. 31.

Weitere Betrachtungen über die Convergenz und Divergenz der Reihen.

Da wir sämmtliche Glieder der vorgelegten Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

als positiv und als successiv abnehmend voraussetzen, so finden offenbar folgende Beziehungen statt:

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0 \\ 2u_1 &= 2u_1 \\ 4u_3 &< 2u_2 + 2u_3 \\ 8u_7 &< 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7 \\ 16u_{15} &< 2u_8 + 2u_9 + \cdots + 2u_{15} \end{aligned}$$

u. s. w.

deren Fortschrittsgesetz leicht zu übersehen ist. Durch Addition derselben ergiebt sich

$$(1) \qquad u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \cdots$$
$$< 2(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots) - u_0$$

Wenn nun die ursprüngliche Reihe $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc. convergirt, so ist ihre Summe eine endliche Gröfse und mithin steht rechter Hand in No. (1) gleichfalls eine endliche Gröfse; um so mehr ist diefs linker Hand der Fall, und es folgt daraus, dafs die abgeleitete Reihe $u_0 + 2u_1 + 4u_3 +$ etc. convergirt, wenn diefs mit der ursprünglichen Reihe $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc. der Fall ist.

Durch Division mit 2 und nachherige Addition von $\frac{1}{2}u_0$ kann man der Ungleichung (1) auch die folgende Form geben:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$
$$> \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}(u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + \cdots)$$

Ist hier die abgeleitete Reihe divergent, so mufs ihre Summe wegen der positiven Glieder unendlich wachsen, um so mehr mufs dann die links verzeichnete Reihe eine unendlich wachsende Zahl zur Summe haben, also divergiren; d. h. aus der Divergenz der abgeleiteten Reihe folgt die Divergenz der ursprünglichen Reihe; diefs ist die Umkehrung des vorigen Satzes.

Ferner gelten offenbar folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0 \\ 2u_1 &> u_1 + u_2 \\ 4u_3 &> u_3 + u_4 + u_5 + u_6 \\ 8u_7 &> u_7 + u_8 + \cdots + u_{14} \end{aligned}$$

u. s. w.

aus denen durch Addition folgt

(2) $$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \cdots$$
$$> u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

Diese Ungleichung führt auf der Stelle zu den beiden Sätzen: 1) wenn die ursprüngliche Reihe divergirt, so ist dieſs um so mehr mit der abgeleiteten Reihe der Fall, und 2) aus der Convergenz der abgeleiteten Reihe folgt die Convergenz der ursprünglichen Reihe.

Fassen wir die vier gewonnenen Sätze zusammen, so haben wir das elegante Theorem:

Die beiden unendlichen Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

und

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \cdots$$

sind entweder zugleich convergent oder gleichzeitig divergent.

Um also die ursprüngliche Reihe auf ihre Convergenz oder Divergenz zu prüfen, braucht man nur die abgeleitete Reihe zu untersuchen; die Bedingungen für diese gelten zugleich für jene.

Eine bemerkenswerthe Anwendung hiervon ist folgende; es sei

$$u_0 = \frac{1}{1^\mu}, \quad u_1 = \frac{1}{2^\mu}, \quad u_2 = \frac{1}{3^\mu}, \quad \text{u. s. f.}$$

so sind die beiden in Rede stehenden Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$
$$= \frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \cdots$$

und

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \cdots$$
$$= 1 + 2^{1-\mu} + 4^{1-\mu} + 8^{1-\mu} + 16^{1-\mu} + \cdots$$

Giebt man der letzteren die Form

$$1 + 2^{1-\mu} + (2^{1-\mu})^2 + (2^{1-\mu})^3 + \cdots$$

so erkennt man in ihr eine geometrische Progression; zur Convergenz derselben ist nöthig, daſs

$$2^{1-\mu} = \frac{2^1}{2^\mu} < 1, \quad \text{d. h.} \quad \mu > 1$$

sei; in jedem anderen Falle divergirt sie. Nach dem obigen Theoreme ist nun auch die Reihe

(3) $$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \cdots$$

convergent für $\mu < 1$ und divergent für $\mu \geqq 1$. Hieraus erkennt man z. B., dafs von den Reihen

$$\frac{1}{1\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \cdots$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

die beiden ersten convergiren, die beiden letzten dagegen divergiren.

Die Kenntnifs der Bedingungen, unter welchen die Reihe (3) convergirt, giebt jetzt neuen Anlafs zu Reihenvergleichungen, indem wir wiederum das in §. 29. erörterte Prinzip in Anwendung bringen.

§. 32.

Weitere Reihenvergleichungen.

I. Denken wir uns an die Stelle der Reihe $t_0 + t_1 + t_2 +$ etc., welche wir in §. 29. betrachteten, die Reihe

$$0 + \frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots$$

gesetzt, so ist der Quotient zweier Nachbarglieder

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{n^\mu}{(n+1)^\mu} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\mu = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\mu}$$

und vergleichen wir die obige Reihe mit der nachstehenden

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

so findet in der letzteren Convergenz statt, wenn von einer bestimmten Stelle an

$$(1) \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\mu} \quad \text{und zugleich } \mu > 1$$

ist; dagegen divergirt die Reihe $u_0 + u_1 +$ etc., wenn von einer bestimmten Stelle an

$$(2) \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\mu} \quad \text{und zugleich } \mu \leqq 1$$

ist. Um nun die jedesmalige Doppelbedingung für die Convergenz oder Divergenz in eine einzige zusammenzufassen, schliefsen wir zunächst aus No. (1)

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\mu$$

nehmen beiderseits die natürlichen Logarithmen und dividiren mit $l\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; es ist dann

$$\frac{l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)}{l\left(1 + \frac{1}{n}\right)} > \mu$$

und weil im Falle der Convergenz $\mu > 1$ sein mufs

$$\frac{l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)}{l\left(1 + \frac{1}{n}\right)} > 1$$

Diese Bedingung ist nun stets erfüllt, wenn

$$(3) \qquad Lim\, \frac{l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)}{l\left(1 + \frac{1}{n}\right)} > 1$$

denn sobald man nur n hinreichend grofs nimmt, mufs der links verzeichnete Quotient jedenfalls gröfser als die Einheit bleiben, weil sonst die Annäherung an eine über der Einheit liegende Gränze unmöglich wäre. Die Ungleichung (3) enthält demnach die Bedingung für die Convergenz der Reihe $u_0 + u_1 +$ etc.

Durch ganz ähnliche Schlüsse, die sich nur darin von den vorigen unterscheiden, dafs die Zeichen $>$ und $<$ vertauscht sind, überzeugt man sich leicht, dafs die Divergenzbedingungen (2) in die folgende

$$(4) \qquad Lim\, \frac{l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)}{l\left(1 + \frac{1}{n}\right)} < 1$$

zusammengezogen werden können. Mit dem Vorigen vereinigt giebt diefs folgendes Theorem:

Die unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

convergirt oder divergirt, je nachdem der Gränzwerth

$$Lim\, \frac{l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)}{l\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

mehr oder weniger als die Einheit beträgt.

Es läfst sich dieses Theorem noch in einer anderen für die Anwendung bequemeren Form aussprechen, wenn man den Satz zu Hülfe nimmt, dafs für unendlich wachsende n

$$Lim\left[n\,l\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = Lim\left[l\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = le = 1$$

ist; man hat nämlich durch Zusatz des Faktors $\frac{n}{n}$

$$Lim\,\frac{l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)}{l\left(1+\frac{1}{n}\right)} = Lim\,\frac{n\,l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)}{n\,l\left(1+\frac{1}{n}\right)} = Lim\left[n\,l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)\right]$$

In dieser einfacheren Gestalt lautet das vorige Kennzeichen:

Die unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

convergirt oder divergirt, je nachdem der Gränzwerth

$$Lim\left[n\,l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)\right]$$

mehr oder weniger als die Einheit beträgt.

Beispielsweis wollen wir diefs auf die folgende Reihe anwenden:

$$(5)\quad 1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)} + \ldots$$

deren allgemeines Glied durch die Formel

$$u_n = \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+n-1)}$$

dargestellt wird. Für das folgende Glied ist

$$u_{n+1} = \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)(\beta+n)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+n-1)(\alpha+\beta+n)}$$

Hieraus ergiebt sich sogleich

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\alpha+\beta+n}{\beta+n} = 1 + \frac{\alpha}{\beta+n}$$

und es ist dann weiter

$$n\,l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = n\,l\left(1+\frac{\alpha}{\beta+n}\right) = \alpha\,\frac{n}{\beta+n}\,\frac{l\left(1+\frac{\alpha}{\beta+n}\right)}{\frac{\alpha}{\beta+n}}$$

Erinnert man sich nun, dafs der Quotient $n:(\beta+n)$ für unendlich wachsende n die Einheit zur Gränze hat, und dafs ferner der Quotient $l(1+\delta):\delta$ bei verschwindenden δ in 1 übergeht, so folgt auf der Stelle

$$Lim\left[n\,l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)\right] = \alpha$$

Die in No. (5) verzeichnete Reihe convergirt demnach für $\alpha > 1$ und divergirt für $\alpha < 1$; für $\alpha = 1$ geht die Reihe in die folgende über:

$$1 + \frac{\beta}{\beta + 1} + \frac{\beta}{\beta + 2} + \frac{\beta}{\beta + 3} + \ldots$$

und diese divergirt, wie man aus den Lehren des §. 31. sehr leicht schliefst.

II. Die so eben gegebene Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz der Reihe unter No. (5) dient selbst wieder als Ausgangspunkt zur Aufsuchung einer neuen Convergenzregel. Setzen wir nämlich die Reihe in (5) an die Stelle der in §. 29. betrachteten Reihe $t_0 + t_1 + t_2 +$ etc., so ist

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\beta + n}{\alpha + \beta + n}$$

und wir erhalten jetzt folgende Bestimmungen: die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

convergirt, wenn von einer bestimmten Stelle an

$$(6) \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{\beta + n}{\alpha + \beta + n} \text{ und zugleich } \alpha > 1$$

ist, sie divergirt dagegen, wenn von einer bestimmten Stelle an die Ungleichungen

$$(7) \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{\beta + n}{\alpha + \beta + n} \text{ und } \alpha < 1$$

zusammen erfüllt sind. Um die jedesmaligen Doppelbedingungen zusammenzufassen, schliefsen wir folgendermafsen: aus No. (6) ergiebt sich zunächst

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{\alpha + \beta + n}{\beta + n} \text{ d. i. } > 1 + \frac{\alpha}{\beta + n}$$

mithin durch Transposition der Einheit und nachherige Multiplikation mit n

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > \frac{n\alpha}{\beta + n} \text{ oder } > \frac{\alpha}{1 + \frac{\beta}{n}}$$

Nimmt man n hinreichend grofs, so läfst sich der Divisor $1 + \frac{\beta}{n}$ der Einheit beliebig nahe bringen, also jedenfalls kleiner als der Dividend α machen, welcher No. (6) zufolge die Einheit um eine angebbare Gröfse übersteigt; es wird dann

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1$$

und diese Ungleichung ist erfüllt, wenn die Bedingung

$$Lim\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right] > 1$$

gilt, weil es dann immer eine Stelle $n = m$ geben mufs, von welcher ab der eingeklammerte Ausdruck über der Einheit bleibt. — Durch ganz ähnliche nicht minder einfache Schlüsse überzeugt man sich, dafs die beiden in No. (7) verzeichneten Bedingungen zu der folgenden

$$Lim\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right] < 1$$

vereinigt werden können. Mit dem Vorigen zusammen giebt diefs folgendes Theorem:

Die unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$$

convergirt oder divergirt, je nachdem der Gränzwerth

$$Lim\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right]$$

mehr oder weniger als die Einheit beträgt.

Dieses Kennzeichen der Convergenz oder Divergenz einer Reihe, verbunden mit dem in §. 30. entwickelten, reicht meistentheils zur vollständigen Prüfung einer nur positive Glieder enthaltenden Reihe aus, wie wir an folgendem Beispiele zeigen wollen:

Die gegebene Reihe sei

$$(8)\qquad \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \dots$$

so sind zwei aufeinander folgende Glieder derselben

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)(2n+2)} \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

und hieraus ergiebt sich behufs der Anwendung des einfachsten in §. 30. verzeichneten Criteriums

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)}x^2 = \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}x^2$$

für unendlich wachsende n folgt

$$Lim\frac{u_{n+1}}{u_n} = x^2$$

mithin convergirt die Reihe für $x^2 < 1$ d. h. $x < 1$ und divergirt für $x^2 > 1$ oder $x > 1$.

Um noch über den Fall $x = 1$ entscheiden zu können, entwickeln wir den Ausdruck

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1\right)$$

$$=n\,\frac{6n+5}{(2n+1)^2}=\frac{6+\frac{5}{n}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}$$

Hier giebt der Übergang zur Gränze für unendliche n

$$Lim\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right]=\frac{6}{2^2}=\frac{3}{2}$$

und da diefs mehr als die Einheit beträgt, so convergirt die fragliche Reihe auch für $x=1$; sie convergirt demnach für $x\leqq 1$ und divergirt für $x>1$, womit für alle möglichen Fälle die Entscheidung gegeben ist.

§. 33.

Convergenz der Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

I. Enthält eine Reihe theils positive theils negative Glieder, wie z. B. die folgende:

(1) $$u_0+u_1-u_2-u_3+u_4+u_5-\ldots$$

in welcher das Vorzeichen von Paar zu Paar wechselt, so kann man die Entscheidung ihrer Convergenz leicht auf die vorhin gegebenen Regeln zurückführen, indem man eine neue Reihe bildet, welche dieselben Glieder, jedoch mit gleichen Vorzeichen, enthält. So ersieht man auf der Stelle, dafs die in No. (1) verzeichnete Reihe sicher convergirt, wenn diefs mit der folgenden

(2) $$u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\ldots$$

der Fall ist; denn aus der Convergenz der vorstehenden Reihe folgt zunächst, dafs die beiden Theile derselben

$$u_0+u_1+u_4+u_5+u_8+u_9+\ldots$$

und

$$u_2+u_3+u_6+u_7+u_{10}+u_{11}+\ldots$$

für sich convergirende Reihen bilden und dafs mithin die Reihe (1), welche die Differenz dieser beiden Theile darstellt, eine endliche Summe haben, also convergiren mufs. Dieselben Schlüsse würden bei jedem anderen Gesetze des Zeichenwechsels anwendbar sein.

Besonders häufig kommen Reihen vor, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, also Reihen von der Form

(3) $$u_0-u_1+u_2-u_3+u_4-\ldots$$

bildet man daraus die Reihe der absoluten Werthe aller Glieder, nämlich

(4) $$u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots$$

so convergirt letztere, wenn die Bedingung

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

erfüllt ist, und mithin convergirt jetzt auch die Reihe (3). Man kann aber das so eben benutzte Criterium auf die Reihe (3) unmittelbar anwenden, wenn man berücksichtigt, dafs der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder in den beiden Reihen (3) und (4) der Gröfse nach derselbe und nur im Vorzeichen verschieden ist; man mufs dann als Convergenzbedingung setzen

$$(5) \qquad val.\ num.\ Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

Man bedarf übrigens bei Reihen von der Form (3) meistentheils dieses Kennzeichens nicht einmal, denn es ist gewöhnlich sehr leicht, ganz unmittelbar über ihre Convergenz oder Divergenz zu entscheiden. Letztere findet, wie schon früher bemerkt wurde, sicher statt, wenn alle Reihenglieder gleich sind, oder fortwährend wachsen; ist aber die Reihe eine fallende, deren Glieder ins Unendliche abnehmen, also $u_0 > u_1 > u_2$ etc., endlich $Lim\,(u_n) = 0$, so gelten folgende Bemerkungen. Es ist

$$\begin{aligned}
S_1 &= u_0 \\
S_3 &= u_0 - (u_1 - u_2) \\
S_5 &= u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) \\
&\quad \dots\dots\dots \\
S_{2n+1} &= u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \dots - (u_{2n-1} - u_{2n})
\end{aligned}$$

da nun wegen der Abnahme aller Reihenglieder die hier vorkommenden Differenzen

$$u_1 - u_2,\quad u_3 - u_4,\ \dots\ u_{2n-1} - u_{2n}$$

sämmtlich positiv sind, so folgt aus dem Obigen

$$S_1 > S_3 > S_5 > \dots > S_{2n+1}$$

d. h. die Summen von ungeraden Gliedermengen nehmen immer ab. Andererseits hat man

$$\begin{aligned}
S_2 &= u_0 - u_1 \\
S_4 &= u_0 - u_1 + (u_2 - u_3) \\
S_6 &= u_0 - u_1 + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots \\
S_{2n+2} &= u_0 - u_1 + (u_2 - u_3) + \dots + (u_{2n} - u_{2n+1})
\end{aligned}$$

die hier vorkommenden Differenzen

$$u_0 - u_1,\quad u_2 - u_3,\ \dots\ u_{2n} - u_{2n+1}$$

sind ebenfalls positiv und es folgt daraus:

$$S_2 < S_4 < S_6 < \dots < S_{2n+2}$$

d. h. die Summen von geraden Gliedermengen wachsen. Endlich hat man

$$S_1 - S_2 = u_1,\quad S_3 - S_4 = u_3,\ \dots\ S_{2n+1} - S_{2n+2} = u_{2n+1}$$

und wegen der Abnahme aller Glieder ist jetzt

$$Lim\,(S_{2n+1} - S_{2n+2}) = Lim\,(u_{2n+1}) = 0$$

und mithin müssen sich die Summen S_{2n+1} und S_{2n+2} einer und derselben Gränze nähern; diese Gränze kann aber nicht unendlich sein, weil sonst die fortgesetzte Abnahme der endlichen positiven Gröfsen S_1, S_3 etc. ins Unendliche ginge, was ein offenbarer Widerspruch ist. Hieraus zusammen folgt, dafs die Summe der Reihe $u_0 - u_1 + u_2 -$ etc. eine endliche bestimmte Gröfse sein, mithin die Reihe convergiren mufs; jene Summe ist zugleich kleiner als irgend eine der Zahlen S_1, S_3, S_5 etc. und gröfser als irgend eine der Gröfsen S_2, S_4, S_6 etc.

Dieses Kennzeichen für die Convergenz der Reihen mit Zeichenwechsel, greift weiter als das vorige; durch das erste z. B. würde man über die Convergenz der Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

nicht zur Entscheidung kommen, weil die Reihe der entsprechenden absoluten Werthe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

divergirt; dagegen belehrt uns das zweite Theorem, dafs die fragliche Reihe convergirt und dafs ihre Summe zwischen den aufeinanderfolgenden Gränzen

$$1 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

u. s. w.

enthalten ist. Ganz ähnlich verhält sich die Sache mit den Reihen

$$\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+3} - \frac{1}{\alpha+4} + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

welche ebenfalls divergent werden würden, wenn man den einzelnen Gliedern gleiche Vorzeichen geben wollte.

Eine Folge des obigen Satzes ist noch die, dafs eine ins Unendliche fallende Reihe convergirt, sobald ihre Glieder gruppenweis positiv und negativ sind, und wenn diese Gruppen eine gleiche Anzahl von Gliedern umfassen. Sind nämlich die ersten k Glieder positiv, die folgenden k negativ und so wechselsweis weiter, so hat die Reihe die Form

$$(6)\qquad \begin{array}{l} u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{k-1} \\ - u_k - u_{k+1} - u_{k+2} - \ldots - u_{2k-1} \\ + u_{2k} + u_{2k+1} + u_{2k+2} + \ldots + u_{3k-1} \\ - u_{3k} - u_{3k+1} - u_{3k+2} - \ldots - u_{4k-1} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

dafür kann man auch setzen

$$\begin{array}{l} u_0 - u_k + u_{2k} - u_{3k} + \ldots \\ + u_1 - u_{k+1} + u_{2k+1} - u_{3k+1} + \ldots \\ + u_2 - u_{k+2} + u_{2k+2} - u_{3k+2} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_{k-1} - u_{2k-1} + u_{3k-1} - u_{4k-1} + \ldots \end{array}$$

und sie besteht jetzt aus k Reihen, deren jede für sich convergirt, also eine endliche Gröfse zur Summe hat; da nun das Aggregat von k endlichen Gröfsen selbst endlich sein mufs, so folgt augenblicklich die Convergenz der Reihe (6).

II. Von besonderem Interesse ist noch die Untersuchung über die Convergenz der Reihen von der Form

$$(7)\qquad \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots$$

und

$$(8)\qquad b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

in welchen wir die mit a und b bezeichneten Coeffizienten sämmtlich als positiv voraussetzen wollen. Wir können hier drei Fälle unterscheiden: entweder nämlich sind die Coeffizienten einander gleich, oder sie bilden eine steigende oder endlich eine fallende Reihe.

Findet das Erste statt, wobei wir a den gemeinschaftlichen Werth der Gröfsen a_0, a_1, a_2 etc. und b den gemeinsamen Betrag von b_1, b_2, b_3 etc. nennen wollen, so ist in der ersten Reihe die Summe der n ersten Glieder

$$S_n = a\left[\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos(n-1)x\right]$$

d. i. nach der in §. 14. entwickelten Formel

$$S_n = a\,\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

Für unendlich wachsende n nähert sich dieser Ausdruck keiner bestimmten Gränze, weil der Sinus eines zunehmenden Bogens immer zwischen $+1$ und -1 hin und her oscillirt. Die Reihe (7) hat demnach, ins Un-

endliche fortgesetzt, keine angebbare Summe, divergirt also. — Ähnlich verhält es sich in unserem Falle mit der Reihe (8); für diese ist

$$S_n = b\,[\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx]$$
$$= b\left[\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}x - \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right]$$

wo nun wiederum $Lim\, S_n$ nicht angegeben werden kann und defswegen die unendliche Reihe (8) divergirt.

Bilden die Gröfsen a_0, a_1, a_2 etc. und ebenso b_1, b_2, b_3 etc. eine steigende Reihe, so findet offenbar die Divergenz um so mehr statt, und es bleibt daher noch der Fall zu untersuchen übrig, in welchem jene Gröfsen eine fallende Reihe ausmachen.

Multipliziren wir die Gleichung

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx$$

mit $2\sin\frac{1}{2}x$ und zerlegen rechter Hand jedes doppelte Produkt aus einem Cosinus und einem Sinus in die Differenz zweier Sinus, so wird

$$2\,S_{n+1}\sin\frac{1}{2}x$$
$$= a_0 \sin\frac{1}{2}x + a_1\left(\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{1}{2}x\right) + a_2\left(\sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x\right) + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}\left(\sin\frac{2n-1}{2}x - \sin\frac{2n-3}{2}x\right) + a_n\left(\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{2n-1}{2}x\right)$$

Durch Vereinigung derjenigen Glieder, welche dieselben Sinus enthalten und durch Transposition von $a_n \sin\frac{2n+1}{2}x$ ergiebt sich hieraus

$$2\sin\frac{1}{2}x\,.\,S_{n+1} - a_n \sin\frac{2n+1}{2}x$$
$$= (a_0 - a_1)\sin\frac{1}{2}x + (a_1 - a_2)\sin\frac{3}{2}x + (a_2 - a_3)\sin\frac{5}{2}x + \ldots$$
$$\ldots + (a_{n-1} - a_n)\sin\frac{2n-1}{2}x$$

Lassen wir n unendlich wachsen und setzen wir voraus, dafs die Abnahme der Gröfsen a_0, a_1, a_2, ... ins Unendliche gehe, mithin $Lim\, a_n = 0$ ist, so bleibt jetzt linker Hand nur $2\sin\frac{1}{2}x\,.\,Lim\, S_{n+1}$ übrig und rechter Hand wird die Reihe unendlich, also

$$(9)\quad Lim\ S_{n+1} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\Big\{(a_0 - a_1)\sin\frac{1}{2}x + (a_1 - a_2)\sin\frac{3}{2}x$$
$$+ (a_2 - a_3)\sin\frac{5}{2}x + (a_3 - a_4)\sin\frac{7}{2}x + \ldots\Big\}$$

Betrachten wir zunächst die Reihe

$$(10)\quad (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \ldots$$

bei welcher wir die in Parenthesen stehenden Differenzen als ihre einzelnen Glieder ansehen, so besitzt dieselbe erstens durchaus positive Glieder (wegen $a_0 > a_1 > a_2$ etc.) und ist zweitens auch convergent, denn man erhält durch Vereinigung der aufeinander folgenden Glieder successive

$$a_0 - a_1,\ a_0 - a_2,\ a_0 - a_3,\ a_0 - a_4,\ \ldots$$

d. h. Summen, welche sich (der Voraussetzung $Lim\ a_n = 0$ zufolge) der endlichen Gränze a_0 nähern. Wenn nun schon die aus nur positiven Gliedern bestehende Reihe

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots$$

convergirt, so mufs dasselbe um so mehr mit der Reihe

$$(11)\quad (a_0 - a_1)\sin\frac{1}{2}x + (a_1 - a_2)\sin\frac{3}{2}x + (a_2 - a_3)\sin\frac{5}{2}x + \ldots$$

der Fall sein, weil ihre Glieder, den absoluten Werthen nach, kleiner als die gleichstelligen Glieder der ersten Reihe sind, und aufserdem die Reihe (11) theils positive theils negative Glieder enthält. Bezeichnen wir demnach die endliche Summe der Reihe (11) mit A, so folgt aus No. (9)

$$Lim\ S_{n+1} = \frac{A}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

und hier ist die rechte Seite eine endliche Gröfse, sobald x nicht $= 0$ oder $= \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi$ etc. ist. Diefs giebt folgenden Satz:

Wenn die positiven Gröfsen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine ins Unendliche abnehmende Reihe bilden, so convergirt die Reihe

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \ldots$$

für alle x, welche nicht $= 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi$ etc. sind.

Läfst man $\pi - z$ an die Stelle von x treten, so folgt weiter:

Unter den obigen Voraussetzungen convergirt auch die Reihe

$$\frac{1}{2}a_0 - a_1\cos z + a_2\cos 2z - a_3\cos 3z + \ldots$$

für alle z, die nicht $= \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$ etc. sind.

Die Nothwendigkeit der hinzugefügten Determination erhellt übrigens auch

von selbst aus der Bemerkung, dafs die Reihe in den angegebenen Ausnahmefällen die Form

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

erhält, wo nun, wegen des gleichen Vorzeichens aller Glieder, die blofse unendliche Abnahme von a_0, a_1, a_2 etc. zur Convergenz nicht hinreicht. Für $x = \pi$ oder $x = 0$ kommt man auf das schon unter I. aus anderen Gründen bewiesene Theorem zurück.

Ganz ähnliche Betrachtungen gelten für die Reihe (8); multipliziren wir nämlich die Gleichung

$$S_n = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots + b_n \sin nx$$

mit $2 \sin \frac{1}{2}x$ und zerlegen rechter Hand jedes doppelte Sinusprodukt in eine Cosinusdifferenz, so folgt

$$2 S_n \sin \frac{1}{2}x = b_1\left(\cos\frac{1}{2}x - \cos\frac{3}{2}x\right) + b_2\left(\cos\frac{3}{2}x - \cos\frac{5}{2}x\right) + \dots$$

$$\dots + b_{n-1}\left(\cos\frac{2n-3}{2}x - \cos\frac{2n-1}{2}x\right) + b_n\left(\cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x\right)$$

und dieser Gleichung kann man leicht die Form geben

$$2 \sin \frac{1}{2}x \,.\, S_n + b_n \cos\frac{2n+1}{2}x$$

$$= b_1 \cos\frac{1}{2}x - (b_1 - b_2)\cos\frac{3}{2}x - (b_2 - b_3)\cos\frac{5}{2}x - \dots$$

$$\dots - (b_{n-1} - b_n)\cos\frac{2n-1}{2}x$$

Unter den Voraussetzungen $b_1 > b_2 > b_3 > \dots$ und $Lim\, b_n = 0$ folgt hieraus

$$Lim\, S_n = \frac{1}{2 \sin\frac{1}{2}x}\left\{b_1 \cos\frac{1}{2}x - (b_1 - b_2)\cos\frac{3}{2}x - (b_2 - b_3)\cos\frac{5}{2}x - \dots\right\}$$

Die Reihe

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \dots$$

enthält nun lauter positive Glieder (jede Differenz für ein Glied gerechnet) und ist aufserdem convergent, nämlich ihre Summe $= b_1$; hieraus folgt, dafs die Summe

$$(b_1 - b_2)\cos\frac{3}{2}x + (b_2 - b_3)\cos\frac{5}{2}x + \dots$$

um so mehr eine endliche Gröfse und dafs mithin auch die Differenz

$$b_1 \cos\frac{1}{2}x - (b_1 - b_2)\cos\frac{3}{2}x - (b_2 - b_3)\cos\frac{5}{2}x - \dots$$

einen endlichen Werth haben mufs. Nennen wir den letzteren B, so ist jetzt

$$Lim\ S_n = \frac{B}{2 \sin \frac{1}{2} x}$$

also $Lim\ S_n$ eine endliche Gröfse, wenn nicht $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ etc. Die Reihe (8) mufs demnach, die genannten Fälle ausgenommen, convergiren, ist aber $x = 0$, oder $= \pm 2\pi, \pm 4\pi$ etc., so reduzirt sich die Reihe auf Null und convergirt also noch; man kann daher das Theorem aufstellen:

Wenn die positiven Gröfsen b_1, b_2, b_3 etc. eine ins Unendliche abnehmende Reihe bilden, so ist die Reihe

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

jederzeit convergent.

Für $x = \pi - z$ ergiebt sich hieraus noch der Satz:

Unter den gemachten Voraussetzungen ist die Reihe

$$b_1 \sin z - b_2 \sin 2z + b_3 \sin 3z - \ldots$$

gleichfalls jederzeit convergent.

So geht z. B. aus den entwickelten vier Theoremen auf der Stelle hervor, dafs von den Reihen

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 4x}{4} + \ldots$$

$$\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 4x}{4} + \ldots$$

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \ldots$$

$$\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots$$

die erste für alle x convergirt, die nicht $= 0$ oder gleich einem geraden Vielfachen von π sind, dafs ferner die zweite convergirt, wenn x kein ungerades Vielfaches von π ausmacht und dafs endlich die beiden letzten Reihen jederzeit convergiren.

III. Um ein gröfseres Beispiel von der Prüfung einer Reihe hinsichtlich ihrer Convergenz oder Divergenz zu haben, bei welchem die hauptsächlichsten Criterien Anwendung finden, wollen wir die folgende Reihe betrachten:

$$(12) \quad 1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu - 1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$

deren allgemeines Glied durch die Formel

$$u_n = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{n-1})}{1.2.3.\ldots.n} x^n$$

dargestellt wird, und worin wir μ und x vor der Hand als völlig willkührliche Gröfsen ansehen.

Zunächst ist klar, dafs, wenn μ eine ganze positive Zahl bedeutet, die Reihe endlich wird; denn es mufs dann unter den Differenzen $\mu-1$, $\mu-2$, $\mu-3$, ... nothwendig eine vorkommen, die $=0$ ist; sobald diese Differenz eintritt, verschwinden alle Glieder, welche sie als Faktor enthalten, d. h. die Glieder, die $x^{\mu+1}$, $x^{\mu+2}$ etc. als Faktoren besitzen. Für jedes andere μ dagegen wird die Reihe unendlich und wir haben daher behufs der Convergenzuntersuchung vorauszusetzen, dafs μ keine ganze positive Zahl sei.

Ziehen wir den Quotienten $u_{n+1} : u_n$ in Betracht, wobei

$$u_{n+1} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{n-1})(\mu-n)}{1.2.3.\ldots.n(n+1)} x^{n+1}$$

sein würde, so ist

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = Lim \left(\frac{\mu-n}{n+1} x\right) = -x$$

Hier giebt das negative Vorzeichen zu erkennen, dafs die fragliche Reihe früher oder später einen Zeichenwechsel erhält, sobald x als positiv angenommen wird, was wir nachher genauer erörtern werden. Nach den unter No. I. dieses Paragraphen gemachten Bemerkungen convergirt oder divergirt nun die Reihe, je nachdem der absolute Werth von x weniger oder mehr als die Einheit beträgt; man hat also

Convergenz für $1 > x > -1$, oder $x^2 < 1$

Divergenz für $x > 1$ und $x < -1$, oder $x^2 > 1$.

Es bleibt nun noch der Fall zu erörtern, in welchem der absolute Werth von x der Einheit gleich ($x^2 = 1$) ist, und hier müssen die Unterscheidungen $x = +1$ und $x = -1$ gemacht werden.

Sei nun erstlich $x = +1$, so geht die Reihe (12) bei **positiven** μ in die folgende über:

$$(13) \qquad 1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} + \ldots$$

und da μ der Voraussetzung nach keine ganze positive Zahl ist, so giebt es immer zwei auf einander folgende Zahlen $m-1$ und m, zwischen denen μ enthalten ist, so dafs $\mu-\overline{m-1}$ noch positiv, $\mu-m$ dagegen negativ ausfällt. Die obige Reihe läfst sich jetzt in folgender Form darstellen:

$$1+\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\overline{m-1})}{1.2.3\ldots.m}$$
$$-\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{m-1})(m-\mu)}{1.2.3\ldots.m(m+1)}$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\overline{m-1})(m-\mu)(m+1-\mu)}{1.2\ldots.m(m+1)(m+2)}$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so dafs von einer gewissen endlichen Stelle an ein Zeichenwechsel eintritt. Bezeichnen wir die jedenfalls endliche Summe der $(m+1)$ ersten Glieder mit S_{m+1}, so ist die Reihe

$$= S_{m+1}$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\overline{m-1})}{1.2\ldots.m}\left[1-\frac{m-\mu}{m+1}+\frac{(m-\mu)(m+1-\mu)}{(m+1)(m+2)}-\ldots\right]$$

und es wird nun die ganze Reihe convergiren, wenn diefs mit dem eingeklammerten Theile der Fall ist. Das Letztere findet aber sicher statt, weil schon die Reihe der absoluten Werthe

$$1+\frac{m-\mu}{m+1}+\frac{(m-\mu)(m+1-\mu)}{(m+1)(m+2)}+\frac{(m-\mu)(m+1-\mu)(m+2-\mu)}{(m+1)(m+2)(m+3)}+\ldots$$

convergirt, wie man aus dem Resultate

$$Lim\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right]=Lim\left[n\left(\frac{m+n}{m+n-1-\mu}-1\right)\right]$$
$$=Lim\left[\frac{n(1+\mu)}{m+n-1-\mu}\right]=1+\mu>1$$

ohne Weiteres schliefst. Die vorhin eingeklammerte Reihe convergirt demnach für alle positiven μ und ebenso ist diefs jetzt mit der Reihe (13) der Fall. Wäre dagegen μ negativ, etwa $\mu=-\lambda$, so würde sich die Reihe (13) in die folgende

$$(14)\qquad 1-\frac{\lambda}{1}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{1.2}-\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.2.3}+\ldots$$

verwandeln, welche nur für $\lambda<1$ convergiren kann, weil aufserdem die Glieder entweder sämmtlich gleich werden, oder eine steigende Reihe bilden würden. Dafs sie aber in der That auch für jedes ächt gebrochene λ convergirt, erkennt man leicht durch Zusammenziehung je zweier Nachbarglieder; es wird nämlich No. (14) gleich

$$(1-\lambda)\left\{1+\frac{\lambda(\lambda+1)}{2.3}+\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{2.3.4.5}+\ldots\right\}$$

und diese Reihe convergirt für $1>\lambda$ zufolge des in §. 32. entwickelten Theoremes. — Die Reihe (13) convergirt demnach für alle positiven μ und solche negative μ, deren absoluter Werth weniger als die Einheit beträgt, was durch $\infty>\mu>-1$ angedeutet werden möge.

Ist zweitens in No. (12) $x = -1$, so ergiebt sich die Reihe

$$(15) \qquad 1 - \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} + \ldots$$

Für ein positives μ, welches zwischen $m-1$ und m liegt, kann hier eine ähnliche Theilung der Reihe, wie vorhin, veranstaltet werden und man erhält, die Summe der $m+1$ ersten Glieder mit S_{m+1} bezeichnet,

$$S_{m+1} \pm \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-m-1)}{1.2\ldots.m}\left[1 + \frac{m-\mu}{m+1} + \frac{(m-\mu)(m+1-\mu)}{(m+1)(m+2)} + \ldots\right]$$

wo die eingeklammerte Reihe convergirt, wie wir schon vorhin bemerkt haben; die Reihe (15) convergirt demnach für alle positiven μ. Für negative $\mu = -\lambda$ dagegen wird aus (15)

$$1 + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.2} + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.2.3} + \ldots$$

und diese Reihe könnte nur für $\lambda < 1$ convergiren, weil aufserdem die Glieder gleich werden oder steigen würden. Aber auch für $\lambda < 1$ convergirt die Reihe nicht, denn aus §. 32. findet man $1 - \lambda > 1$ als Convergenzbedingung, die hier, wo λ als positiv gilt, unmöglich wird.

Alles Bisherige zusammengenommen giebt folgende Bestimmungen:

Die Reihe

$$1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

welche unter der Voraussetzung eines nicht ganzen positiven μ ins Unendliche geht, convergirt für jedes μ, wenn $1 > x > -1$; für $x = +1$ dagegen mufs $+\infty > x > -1$ und für $x = -1$, $+\infty > \mu > 0$ sein, wenn nicht die Divergenz eintreten soll.

§. 34.

Die Addition und Multiplikation unendlicher Reihen.

Wir haben früher angedeutet, dafs es eines der wichtigsten Geschäfte der Analysis sei, unendliche Reihen zu summiren; diese Aufgabe kann natürlich nur dadurch gelöst werden, dafs man mit den fraglichen Reihen verschiedene Rechnungsoperationen vornimmt, wobei auch der Fall eintreten kann, dafs man unendliche Reihen zu addiren oder zu multipliziren, oder sonstige Hülfsmittel des Calcüls auf sie anzuwenden hat. Bevor wir aber derartige Untersuchungen anfangen, haben wir die Frage zu beantworten, mit welchem Rechte man solche Rechnungsoperationen mit unendlichen Reihen vornimmt und wie weit die Befugnifs dazu reicht. Diese Frage ist defshalb nothwendig, weil uns die Arithmetik blofs mit endlichen bestimmten Gröfsen oder Polynomen von endlicher Gliederanzahl rechnen gelehrt hat, hier aber Ausdrücke, welche ins Unendliche fortlaufen, dem

Calcül unterworfen werden sollen, und wollten wir jene Frage unbeantwortet lassen, so träfe die Analysis der Vorwurf einer willkührlichen Ausdehnung rein arithmetischer Rechnungsoperationen, die vielleicht in manchen Fällen zu höchst widersinnigen Resultaten führen könnte.

Über die Befugnifs nun, mit unendlichen Reihen nach den Regeln der Arithmetik zu rechnen, haben wir Folgendes zu bemerken. Alle bisherigen Rechnungen beschäftigten sich mit Gleichungen und selbst da, wo Ungleichheiten eingeführt wurden, geschah diefs nur zur Ausmittelung von Gränzwerthen, welche sich zuletzt doch wieder in Gleichungen aussprachen. Es liefse sich wohl auch eine Analysis denken, die es mit unbestimmteren Beziehungen, etwa Ungleichheiten, Ähnlichkeiten u. dergl. zu thun hätte, aber sie würde nur von untergeordneter Bedeutung sein, da man in das Wesen der Gröfsenverknüpfungen offenbar durch Gleichungen die klarste Einsicht bekommen mufs. Ohne also die Versuche, welche von so schwankenden und untergeordneten Standpunkten aus gemacht werden könnten und gemacht worden sind, weiter zu beachten, wollen wir uns jetzt nach den Rechtstiteln umsehen, unter welchen die Rechnung mit unendlichen Reihen erlaubt ist.

Zuerst erhellt, dafs wir die divergenten Reihen aus analytischen Betrachtungen ganz ausschliefsen müssen; denn da unsere Analysis sich mit Identitäten beschäftigt und divergente Reihen keiner bestimmten Gröfse gleich sind, sondern sich dem Rechner unter den Händen beständig ändern, so mufs hier jede weitere Betrachtung aufhören; alle fernere Rechnung mit ihnen würde sich nur auf die völlig unerwiesene Hypothese stützen, dafs hier die arithmetischen Regeln noch anwendbar seien. So bleiben uns allein die convergenten Reihen und bei diesen lassen sich die Umstände, unter welchen man mit ihnen rechnen kann, leicht aus der Lehre von den Gränzen herleiten. Wir haben nämlich folgende Hauptsätze:

I. Das Aggregat zweier convergenten Reihen ist selbst eine convergente Reihe und ihre Summe gleich dem Aggregate von den Summen der gegebenen Reihen. Denn wenn

$$P_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$
$$Q_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

ist, worin P_n und Q_n Funktionen von n sind, welche sich für wachsende n endlichen bestimmten Gränzen nähern, so ist

$$u_0 + v_0 + u_1 + v_1 + \dots + u_n + v_n$$
$$= P_n + Q_n$$

folglich durch Übergang zur Gränze für unendlich wachsende n

$$u_0 + v_0 + u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + \dots \text{ in inf.}$$
$$= Lim\,(P_n + Q_n)$$
d. h. gleich einer endlichen Gröfse, mithin die Reihe links convergent und ihre Summe $= Lim\,P_n + Lim\,Q_n$, was behauptet wurde. Der Satz gilt übrigens allgemeiner für jede endliche Anzahl gegebener Reihen, wie man unmittelbar aus dem Theoreme
$$Lim\,(P_n \pm Q_n \pm \dots \pm T_n)$$
$$= Lim\,P_n \pm Lim\,Q_n \pm \dots \pm Lim\,T_n$$
erkennen wird.

II. Das Produkt zweier convergenten Reihen mit lauter positiven Gliedern bildet wieder eine convergente Reihe, ihre Summe ist das Produkt aus den Summen der gegebenen Reihen.

Um eine bequeme Übersicht über die Partialprodukte der Multiplikation zu haben, wollen wir die beiden Reihen nach Potenzen einer beliebigen Gröfse x fortgehen lassen und setzen

(1) $$P_{2n} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n}$$
(2) $$Q_{2n} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{2n} x^{2n}$$

Das Produkt von beiden Reihen ist:

$$\begin{aligned} & a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\,x \\ & + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\,x^2 \\ & + \dots\dots\dots \\ (3)\quad & + (a_0 b_{2n} + a_1 b_{2n-1} + \dots + a_{2n-1} b_1 + a_{2n} b_0)\,x^{2n} \\ & + (a_1 b_{2n} + a_2 b_{2n-1} + \dots + a_{2n-1} b_2 + a_{2n} b_1)\,x^{2n+1} \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots \\ & + (a_{2n-1} b_{2n} + a_{2n} b_{2n-1})\,x^{4n-1} \\ & + a_{2n} b_{2n} x^{4n} \end{aligned}$$

Bezeichnen wir S_{2n} die Summe der $n + 1$ ersten Glieder des Produktes, also

(4) $$S_{2n} = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\,x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\,x^2 + \dots$$
$$\dots + (a_0 b_{2n} + a_1 b_{2n-1} + \dots + a_{2n-1} b_1 + b_{2n})\,x^{2n}$$

so ist

(5) $$S_{2n} < P_{2n} Q_{2n}$$

weil $P_{2n} Q_{2n}$ aufser dem, was in S_{2n} sich findet, noch die Glieder mit x^{2n+1}, x^{2n+2}, ... x^{4n} enthält, welche positiv sind, da alle Glieder der Reihen (1) und (2) positiv angenommen werden. Multiplizirt man dagegen die Reihen

(6) $$P_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$
(7) $$Q_n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$$

welche n Glieder weniger enthalten, als die in (1) und (2), so erhält man als Produkt

$$\begin{aligned}&a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x \\ &+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 \\ &+ \cdots\cdots\cdots \\ &+ (a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}) x^{2n-1} \\ &\qquad + a_n b_n x^{2n}\end{aligned}$$

und aus der Vergleichung desselben mit (4) ergiebt sich

(8) $$S_{2n} > P_n Q_n$$

Es ist also zusammen mit (5)

(9) $$P_{2n} Q_{2n} > S_{2n} > P_n Q_n$$

Lassen wir nun n ins Unendliche wachsen, so werden die mit P_{2n} und P_n, Q_{2n} und Q_n bezeichneten Reihen zugleich unendliche; bezeichnen wir ihre Summen mit P und Q, welches hier wegen der Convergenz jener Reihen endliche bestimmte Gröfsen sind, so ist

$$Lim\, P_{2n} = Lim\, P_n = P$$
$$Lim\, Q_{2n} = Lim\, Q_n = Q$$

Die äufsersten Gränzen in der Ungleichung (9), zwischen denen S_{2n} liegt, rücken also dann immer näher an einander und es mufs folglich sein:

$$Lim\, S_{2n} = PQ$$

d. h. die Summe der Reihe (4) ist endlich, folglich die Reihe convergent und ihre Summe gleich dem Produkte der ihre Faktoren bildenden Reihensummen.

Hörten die Reihen (1) und (2) mit ungeradstelligen Gliedern auf, d. h. wären sie von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} + x^{2n+1}$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{2n} x^{2n} + b_{2n+1} + x^{2n+1}$$

so bezeichne man sie mit

$$P_{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1} \text{ und } Q_{2n} + b_{2n+1} x^{2n+1}$$

und setze diefs in dem vorigen Beweise für P_{2n} und Q_{2n}, so reduzirt man diesen Fall auf den vorigen und kann nun allgemein sagen:

Wenn die unendlichen und convergenten Reihen

(10) $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

(11) $$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

nur positive Glieder enthalten, so ist ihr Produkt identisch mit

(12) $$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots$$

und das Produkt ihrer Summen gleich der Summe dieser neuen Reihe. In diesem Falle also ist die Multiplikation nach den Regeln der Arithmetik geradezu erlaubt.

Die soeben geführten Schlüsse finden aber gar keine Anwendung mehr, wenn die Reihen (1) und (2) auch negative Glieder enthalten. Denn in diesem Falle kann man nicht sagen, dafs $S_{2n} < P_{2n} Q_{2n}$ sei, weil die

Glieder, welche $P_{2n}\,Q_{2n}$ mehr enthält, als S_{2n} zusammen so viel Negatives geben könnten, dafs $P_{2n}\,Q_{2n}$ gleich oder gar kleiner als S_{2n} würde und ebenso wenig könnte man behaupten, dafs $S_{2n} > P_n\,Q_n$ sei. — Sind die Glieder in den Reihen (10) und (11) mit wechselnden Zeichen versehen, also a_0, a_2, a_4 etc. positiv, a_1, a_3, a_5 etc. negativ und besitzen diese neuen Reihen

$$(13)\qquad a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots$$

$$(14)\qquad b_0 - b_1 x + b_2 x^2 - b_3 x^3 + \ldots$$

die Eigenschaft, convergent zu bleiben, wenn man ihnen durchaus positive Zeichen giebt, so läfst sich die Sache leicht entscheiden. Denn in diesem Falle ist die Reihe (12) convergent, folglich ist es um so mehr die folgende

$$(15)\quad a_0 b_0 - (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 - \ldots$$

welche das Produkt von (13) und (14) ist, mithin gilt dann der Satz noch.

Haben dagegen die Reihen (13) und (14) die Eigenschaft, divergent zu werden, sobald man die Glieder auf ihre absoluten Werthe reduzirt, so läfst sich auch die soeben gemachte Betrachtung nicht anwenden, also nichts beweisen. In der That erleidet dann auch der Satz Ausnahmen, wie man aus dem folgenden Beispiele sehen kann.

Multiplizirt man nach der gewöhnlichen Weise die Reihe

$$(16)\qquad \frac{1}{\sqrt[4]{1}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \ldots$$

mit sich selbst, oder was das Nämliche ist, nimmt man die Reihen (13) und (14) gleich der vorstehenden und $x = 1$, so erhält man für die Reihe (15) die folgende:

$$(17)\quad \frac{1}{\sqrt[4]{1}} - \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2\,.\,2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$$
$$- \left(\frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3\,.\,2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2\,.\,3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4}}\right) + \text{etc.}$$

deren allgemeines Glied, abgesehen vom Vorzeichen, unter folgender Form steht:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(n-1)\,.\,2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(n-2)3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{2(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

in welcher man sich die einzelnen Summanden dadurch entstanden denken kann, dafs man in dem Ausdrucke

$$(18)\qquad \frac{1}{\sqrt[4]{(n-p)\,(p+1)}}$$

für p der Reihe nach $0, 1, 2, \ldots n-1$ setzt. Nun ist aber immer*)

$$(19) \qquad (n-p).(p+1) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Denn man setze $p = \frac{n-1}{2} \pm q$, wo nun q jede beliebige Gröfse bedeuten kann, so erhält man

$$(n-p)\ (p+1) = \frac{(n+1)^2 - q^2}{4}$$

also in jedem Falle weniger, als wenn man $p = \frac{n-1}{2}$ gesetzt hätte, wodurch $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ herausgekommen sein würde.

Aus der Gleichnng (19) folgt nun

$$\frac{1}{(n-p)\ (p+1)} > \left(\frac{2}{n+1}\right)^2$$

mithin

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(n-p)\ (p+1)}} > \sqrt{\frac{2}{n+1}}$$

folglich für $p = 0, 1, 2, \ldots n-1$,

$$\frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(n-1).2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(n-2).3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{2.(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

$$> n\sqrt{\frac{2}{n+1}}, \quad \text{d. i.} > \sqrt{\frac{2n}{1+\frac{1}{n}}}$$

Hieraus erkennt man, dafs die absoluten Werthe der einzelnen in der Reihe (17) enthaltenen Glieder beständig wachsen und dafs dieselbe, wenn n ziemlich grofs ist, wo man $\frac{1}{n}$ weglassen kann, von dem $n$ten Gliede an ungefähr ebenso divergirt wie die Reihe

$$\sqrt{2n} - \sqrt{2n+2} + \sqrt{2n+4} - \sqrt{2n+6} + \ldots$$

Gleichwohl war die Reihe (16) convergent, aber sie würde eine divergente geliefert haben, wenn man die einzelnen Glieder sämmtlich positiv genommen hätte.

---

*) Man findet diefs leicht, wenn man die Sache geometrisch betrachtet. Man denke sich $n-p$ und $p+1$, worin p ganz beliebig sein kann, als Seiten eines Rechtecks, so ist $(n-p)\ (p+1)$ sein Inhalt, und $n-p+p+1 = n+1$ sein Umfang, welcher hier in Bezug auf p constant ist. Unter allen Rechtecken von gleichem Umfange hat aber das Quadrat den gröfsten Inhalt; für dieses sind die Seiten gleich, oder $n-p = p+1$, woraus folgt $p = \frac{n-1}{2}$. Dieser Werth von p giebt also das Maximum des Ausdrucks $(n-p)\ (p+1)$ an.

Man könnte glauben, die eben gezeigte sonderbare Erscheinung sei ein Beweis dafür, dafs divergente Reihen endliche Summen haben könnten, und könnte in unserem Beispiele das Quadrat der endlichen Gröfse, welche die Summe der Reihe (16) ist, für die Summe der divergenten Reihe (17) ausgeben wollen. Sieht man aber genauer hin, so wird man im Gegentheil gewahr werden, dafs dieser Schlufs unrichtig und die ganze Rechnung nur ein Beweis dafür ist, dafs man Rechnungsoperationen, die für endliche bestimmte Gröfsen gelten, nicht ohne besondere Vorsicht auf unendlich fortlaufende Ausdrücke anwenden darf.

Das vollständige Produkt der als convergent vorausgesetzten Reihen

(20) $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

und

(21) $$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$$

wäre nämlich

(22) $$\begin{array}{l} a_0 b_0 + a_0 b_1 x + a_0 b_2 x^2 + a_0 b_3 x^3 + \dots \\ + a_1 b_0 x + a_1 b_1 x^2 + a_1 b_2 x^3 + a_1 b_3 x^4 + \dots \\ + a_2 b_0 x^2 + a_2 b_1 x^3 + a_2 b_2 x^4 + a_2 b_3 x^5 + \dots \\ + a_3 b_0 x^3 + a_3 b_1 x^4 + a_3 b_2 x^5 + a_3 b_3 x^6 + \dots \\ + \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

und diefs giebt in der That immer eine convergente Reihe, sobald man die Glieder in horizontaler oder vertikaler Richtung zusammennimmt. Aber so ordnet man die Glieder nicht; man bringt sie in diagonaler Richtung zusammen, indem man immer diejenigen Glieder sucht, welche gleiche Potenzen von x enthalten. Diese Anordnung ist es, welche den Fehler herbeiführt. Man nimmt gewissermafsen immer nur die eine durch die Diagonale abgeschnittene Hälfte von dem Quadrate, welches die sämmtlichen Glieder des Produktes bilden und bekümmert sich um die andere Hälfte nicht. Wird nun diese immer kleiner, je weiter man mit der Diagonale herabrückt, so ist eine solche Anordnung erlaubt, wird sie aber immer gröfser, wie in unserem Beispiele, so ist diese Anordnung falsch, weil sie vernachlässigt, was nicht vernachlässigt werden darf. Man kann diefs auch so ausdrücken: Das Aggregat der Glieder in (22) ist das vollständige Produkt der Reihen (20) und (21), die Reihe

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots$$

dagegen nur das unvollständige Produkt; dieses kann jenes vertreten, wenn das, was zur Vollständigkeit fehlt, immer kleiner wird, wie unter den oben angegebenen Umständen; das unvollständige Produkt darf aber nicht an die Stelle des vollständigen gesetzt werden, wenn man nicht von der beständigen Abnahme der Ergänzung überzeugt ist.

§. 35.

Die Gränzwerthe bei unendlichen Reihen.

Wir haben früher ausdrücklich bemerkt, dafs der Satz

$$Lim\,[\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots + \varphi_m(x)]$$
$$= Lim\,\varphi_1(x) + Lim\,\varphi_2(x) + Lim\,\varphi_3(x) + \ldots$$
$$\ldots + Lim\,\varphi_m(x)$$

worin sich das Zeichen *Lim* auf eine Veränderung des x bezieht, zwar für jede endliche Anzahl m von Funktionen, aber ohne Weiteres nicht für eine unendliche Menge derselben gilt; wir wollen jetzt diesen Ausnahmefall näher betrachten.

Zunächst ist klar, dafs die unendliche Reihe

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots$$

als convergente vorausgesetzt werden mufs, weil aufserdem die ganze Betrachtung selbst keinen Sinn haben würde; sind nun $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Gränzen, denen sich die einzelnen Glieder $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... bei der Veränderung des x nähern, so sei wie früher

$$\varphi_1(x) = a_1 + \delta_1,\quad \varphi_2(x) = a_2 + \delta_2,\quad \varphi_1(x) = a_3 + \delta_3,\ \ldots$$

und hier sind $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ Gröfsen, von welchen nur die eine Eigenschaft bekannt ist, dafs sie der Null beliebig nahe gebracht werden können; es wird jetzt

$$(1)\qquad \begin{aligned} \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots \\ = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \\ + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots \end{aligned}$$

und hier sind zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich die Reihe der Gränzwerthe $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ divergirt oder convergirt. Fände das Erste statt, so mufs auch die Reihe $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots$ divergiren, weil aufserdem die divergente Reihe $a_1 + a_2 +$ etc. mit der convergenten Reihe $\delta_1 + \delta_2 +$ etc. zusammen eine divergente Reihe geben würde, was gegen die Voraussetzung streitet, dafs die linke Seite convergiren soll; wenn nun aber beide Reihen rechter Hand divergiren, was nicht hindert, dafs ihre Summe convergent ist*), so läfst sich schlechterdings nicht angeben, was aus

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots.$$

*) Die beiden divergirenden Reihen seien z. B.

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$$
$$- \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \cdots\cdots$$

so convergirt ihre Summe.

wird, wenn sämmtliche δ immer kleiner werden, und es kann trotzdem diese Summe immer noch einen sehr ansehnlichen Werth behalten. Die genauere Ermittelung desselben würde in jedem speziellen Falle, wo die Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ etc. gegeben sind, aus den besonderen Eigenschaften derselben herzuholen sein.

Wenn dagegen zweitens die Reihe der Gränzwerthe $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ convergirt, so mufs auch die Reihe

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots$$

convergiren, weil sie im Gegenfalle mit der ersten convergenten Reihe zusammen nicht die links stehende convergirende Reihe geben könnte. Hier ist nun kein Zweifel, dafs bei fortgesetzter Abnahme aller δ

$$(2) \qquad Lim\,(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots) = 0$$

sein müsse. Wären nämlich sämmtliche δ positiv und die Summe

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots = \theta$$

wo nun θ jedenfalls einen endlichen Werth hat, so lasse man $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... näher an ihre Gränzen a_1, a_2, ... heranrücken, wodurch sich sämmtliche δ vermindern und die kleineren Werthe δ'_1, δ'_2, ... erhalten mögen; es ist dann ähnlich

$$\delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3 + \dots = \theta'$$

und offenbar $\theta' < \theta$; weil nun aber sämmtliche δ der Null beliebig nahe kommen können, so kann man sie auch beliebig vielmal kleiner als ihre ursprünglichen Werthe machen, wenn also k eine willkührliche Zahl bezeichnet, so kann

$$\delta'_1 < \frac{1}{k}\delta_1, \quad \delta'_2 < \frac{1}{k}\delta_2, \quad \delta'_3 < \frac{1}{k}\delta_3, \quad \dots$$

werden, woraus

$$\theta' < \frac{1}{k}\theta$$

folgt. Lassen wir k ins Unendliche wachsen und berücksichtigen, dafs die anfängliche Summe θ von endlicher Gröfse ist, so erhellt auf der Stelle, dafs die Summe θ' die Null zur Gränze hat, d. h. θ in Null übergeht, wenn die einzelnen Gröfsen δ_1, δ_2, ... verschwinden. Diese Bemerkungen bleiben im Wesentlichen dieselben, wenn auch die Gröfsen δ_1, δ_2, δ_3, ... theils positiv theils negativ sein sollten; man kann nämlich in diesem Falle jedes positive Reihenglied mit einem negativen vereinigen und dadurch eine Reihe von Differenzen bilden, welche sämmtlich gleiche Vorzeichen haben; nennen wir Δ_1, Δ_2, ... diese Differenzen, so ist dann

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots$$
$$= \pm [\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots]$$

und jetzt gilt von diesen Gröſsen Δ_1, Δ_2, ... wörtlich Dasselbe, was vorhin von δ_1, δ_2, ... gesagt wurde. Benutzen wir nun die Gleichung (2) zum Gränzenübergange in No. (1), so folgt

$$Lim\,[\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \dots]$$
$$= a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

d. i. vermöge der Bedeutung von a_1, a_2, a_3, ... auch

$$= Lim\,\varphi_1(x) + Lim\,\varphi_2(x) + Lim\,\varphi_3(x) + \dots$$

Wir können demnach folgendes Theorem aufstellen:

Wenn die beiden unendlichen Reihen

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \dots$$

und

$$Lim\,\varphi_1(x) + Lim\,\varphi_2(x) + Lim\,\varphi_3(x) + \dots$$

gleichzeitig convergiren, so gilt die Gleichung

$$Lim\,[\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \dots]$$
$$= Lim\,\varphi_1(x) + Lim\,\varphi_2(x) + Lim\,\varphi_3(x) + \dots$$

sie besteht dagegen nicht mehr, wenn eine der obigen Reihen, oder jede, divergent ist.

Beispiele für beide Fälle sind folgende. Nach den Lehren des vorigen Paragraphen convergirt die Reihe

$$\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - \frac{\sin 4x}{4^3} + \dots$$

nennen wir $F(x)$ ihre Summe, so ist

$$(3)\qquad \frac{F(x)}{x} = \frac{1}{1^3}\,\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2^3}\,\frac{\sin 2x}{x} + \frac{1}{3^3}\,\frac{\sin 3x}{x} - \dots$$

und die nunmehrige Reihe gleichfalls convergent.

Um hier zur Gränze für verschwindende x überzugehen, benutzen wir das Theorem

$$Lim\,\frac{\sin mx}{x} = m$$

es ist dann die Reihe der Gränzwerthe von den einzelnen Gliedern:

$$\frac{1}{1^3}\cdot 1 - \frac{1}{2^3}\cdot 2 + \frac{1}{3^3}\cdot 3 - \frac{1}{4^3}\cdot 4 + \dots$$

und diese Reihe convergirt; daher gilt jetzt die Gleichung

$$(4)\qquad Lim\,\frac{F(x)}{x} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

Anders verhält sich die Sache bei der Reihe

$$\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$$

deren Summe $f(x)$ heiſsen möge; hier ist zwar in

(5) $$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1}\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{x} + \frac{1}{3}\frac{\sin 3x}{x} - \dots$$

die Reihe rechter Hand convergent; die Reihe der Gränzwerthe dagegen:

$$\frac{1}{1}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 3 - \frac{1}{4}\cdot 4 + \dots$$

divergirt, und daher würde es unrichtig sein, wenn man

(6) $$Lim\,\frac{f(x)}{x} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

setzen wollte, wie sich auch später auf anderem Wege zeigen wird.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, die soeben betrachteten Beispiele noch etwas schärfer anzusehen, weil sich gerade hier die vorhin mit δ_1, δ_2, δ_3, ... bezeichneten Gröfsen näher angeben lassen und dadurch die früheren allgemeinen Bemerkungen anschaulicher werden. Wie schon in §. 9. nachgewiesen wurde, ist der Quotient $\frac{\sin z}{z}$ zwischen 1 und $\cos z$ enthalten, man kann daher

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \lambda(1 - \cos z)$$

setzen, wo λ einen ächten Bruch bezeichnet; ebenso ist

$$\frac{\sin mx}{x} = m - m\lambda(1 - \cos mx)$$

und wenn wir diese Gleichung auf die vorigen Beispiele für $m = 1$, 2, 3, ... anwenden, so folgt

(7) $$\frac{F(x)}{x} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$
$$- \frac{\lambda_1(1 - \cos x)}{1^2} + \frac{\lambda_2(1 - \cos 2x)}{2^2} - \frac{\lambda_3(1 - \cos 3x)}{3^2} + \dots$$

wobei λ_1, λ_2, λ_3, ... sämmtlich ächte Brüche bedeuten; ferner ist

(8) $$\frac{f(x)}{x} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$
$$- \lambda_1(1 - \cos x) + \lambda_2(1 - \cos x) - \lambda_3(1 - \cos x) + \dots$$

In diesen beiden Gleichungen ist die jedesmalige erste Reihe die Reihe der Gränzwerthe a_1, a_2, a_3 etc. und die zweite die Reihe der Gröfsen δ_1, δ_2, δ_3 etc.; bei dem ersten Beispiele convergirt die letztere Reihe und ihre Summe verschwindet daher mit x gleichzeitig, in dem zweiten Beispiele dagegen divergirt die Reihe der δ und es ist defshalb der Gränzwerth ihrer Summe ebensowenig als letztere selbst angebbar.

An das allgemeine Theorem, zu welchem wir gelangt sind, knüpft sich noch eine Partie von Folgerungen, deren Erheblichkeit die späteren Untersuchungen darthun werden; es sind nämlich folgende Bemerkungen zu machen.

I. Zwischen der Funktion $f(x)$ und den Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... bestehe die Gleichung

$$(9) \qquad f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots$$

und zwar für alle x, welche kleiner als eine gegebene Gröfse ξ sind, sie bestehe aber nicht mehr für $x > \xi$, so läfst sich die Frage, ob die Gleichung auch noch für $x = \xi$ richtig bleibe, sehr leicht auf folgende Weise entscheiden: Man setze $x = \xi - \varrho$, wo ϱ eine beliebig kleine Gröfse bezeichnet, so gilt den Voraussetzungen nach die Gleichung

$$f(\xi - \varrho) = \varphi_1(\xi - \varrho) + \varphi_2(\xi - \varrho) + \varphi_3(\xi - \varrho) + \ldots$$

und hier mufs die Reihe rechter Hand convergiren, weil sie aufserdem keiner bestimmten Funktion $f(\xi - \varrho)$ gleich wäre; durch beiderseitigen Übergang zur Gränze für verschwindende ϱ folgt weiter

$$(10) \quad f(x - 0) = Lim\,[\varphi_1(\xi - \varrho) + \varphi_2(\xi - \varrho) + \varphi_3(\xi - \varrho) + \ldots]$$

ist nun die Reihe der Gränzwerthe

$$Lim\ \varphi_1(\xi - \varrho) + Lim\ \varphi_2(\xi - \varrho) + Lim\ \varphi_3(\xi - \varrho) + \ldots$$
$$= \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi) + \varphi_3(\xi) + \ldots$$

convergent, so darf man sie statt der rechten Seite von No. (10) substituiren und erhält dann

$$(12) \qquad f(\xi - 0) = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi) + \varphi_3(\xi) + \ldots$$

d. h. in Worten, und mit Rücksicht auf die Bedeutung von $f(\xi - 0)$ und $f(\xi + 0)$:

> Wenn die Funktion $f(x)$ der unendlichen und convergenten Reihe $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) +$ etc. für alle $x < \xi$ gleichgilt, so besteht die Gleichung
>
> $$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots$$
>
> auch für $x = \xi$ unter der Bedingung, dafs die Reihe für diesen Werth von x noch convergent bleibt; sollte $f(x)$ an der Stelle $x = \xi$ eine Unterbrechung der Continuität erleiden, so gilt von den beiden Werthen $f(\xi - 0)$ und $f(\xi + 0)$ der erste.

II. Nach den Lehren des §. 12. erfordert die Quadratur einer Funktion einen Gränzenübergang, es gilt daher von der durch den Buchstaben Q angedeuteten Operation alles Das, was wir oben von der mit *Lim* bezeichneten Operation gesagt haben; diefs giebt mit dem Vorigen zusammen folgendes Theorem:

> Aus einer Gleichung von der Form
>
> $$F(x) = A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + A_3\varphi_3(x) + \ldots$$
>
> läfst sich durch beiderseitige Quadratur die folgende herleiten:
>
> $$QF(x) = A_1 Q\varphi_1(x) + A_2 Q\varphi_2(x) + A_3 Q\varphi_3(x) + \ldots$$
>
> und zwar besteht dieselbe so lange, als die Reihe convergirt.

III. Hat man eine Gleichung von der Form

(13) $$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

wo schon durch den blofsen Gebrauch des Gleichheitszeichens die Convergenz der Reihe supponirt ist, und gilt jene Gleichung innerhalb eines bei Null anfangenden Intervalles, also etwa von $x = 0$ bis $x = \xi$, so kann man x in Null übergehen lassen und erhält

(14) $$f(0) = A_0,$$

weil die Reihe der Gränzwerthe sich auf das eine Glied A_0 reduzirt, also immer convergent ist. Wäre gleichzeitig

(15) $$f(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots$$

so mufs aus denselben Gründen die Gleichung

(16) $$f(0) = B_0$$

statt finden; aus der Vergleichung von (13) mit (15) und von (14) mit (16) schliefst man jetzt, dafs die Identität zweier convergenten Reihen der Form

(17) $$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots$$

jederzeit die Gleichung

$$A_0 = B_0$$

nach sich zieht. Läfst man jetzt A_0 und B_0 aus der Gleichung (17) weg und dividirt beiderseits mit x, so folgt

$$A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \dots = B_1 + B_2 x + B_3 x^3 + \dots$$

und nun läfst dieselbe Schlufsweise wie vorhin erkennen, dafs

$$A_1 = B_1$$

sein mufs. Wie man auf diese Weise weiter gehen kann, erhellt von selbst, und so gelangt man zu dem Theoreme:

Sind die beiden convergenten Reihen

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

und

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots$$

für alle x gleich, die innerhalb eines bei $x = 0$ anfangenden Intervalles liegen, so finden auch die Gleichungen statt:

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2 \text{ u. s. w.}$$

Finge das Intervall, innerhalb dessen die fraglichen Reihen gleich sind, nicht mit $x = 0$ an, so dürfte man, ohne die Gleichung zu stören, x nicht in Null übergehen lassen und dann braucht auch der obige Satz nicht zu gelten; ebenso wenig besteht derselbe, wenn die Reihen divergiren, denn man kann in diesem Falle nicht allgemein behaupten, dafs sich die Reihe

$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 +$ etc. auf ihr erstes Glied reduzirt, sobald x in Null übergeht.

§. 56.

Die Doppelreihen.

Unter einer Doppelreihe, oder, wie man öfter sagt, einer Reihe mit doppeltem Eingange, versteht man ein Aggregat von Gliedern, welche nach folgendem Schema zusammengestellt sind:

(1)
$$\begin{array}{l} u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \\ + u'_0 + u'_1 + u'_2 + u'_3 + \cdots \\ + u''_0 + u''_1 + u''_2 + u''_3 + \cdots \\ + u'''_0 + u'''_1 + u'''_2 + u'''_3 + \cdots \\ + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{array}$$

das allgemeine Glied einer solchen Reihe würde durch das Symbol

$$u_n^{(m)}$$

dargestellt werden, worin m und n ein paar ganze positive Zahlen sind, von denen man m den oberen und n den unteren Index nennen kann. Nimmt man eine endliche Anzahl von Gliedern aus dem Schema (1) heraus, etwa

(2)
$$\begin{array}{l} u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} \\ + u'_0 + u'_1 + u'_2 + \cdots + u'_{n-1} \\ + u''_0 + u''_1 + u''_2 + \cdots + u''_{n-1} \\ + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ + u_0^{(m-1)} + u_1^{(m-1)} + u_2^{(m-1)} + \cdots + u_{n-1}^{(m-1)} \end{array}$$

so ist die Summe derselben jedenfalls eine endliche Gröfse, sobald die einzelnen Reihenglieder selbst endliche Gröfsen sind, und in so fern jene Summe eine Funktion von m und n sein mufs, wollen wir sie mit

$$s_n^{(m)}$$

bezeichnen. Die Summe der unendlichen Doppelreihe (1) nennen wir Dasjenige, was aus $s_n^{(m)}$ wird, wenn man die ganzen Zahlen m und n gleichzeitig ins Unendliche wachsen läfst und hierbei sind offenbar zwei Fälle möglich, entweder nämlich nähert sich $s_n^{(m)}$ unter den angegebenen Umständen einer bestimmten Gränze S oder es ist eine solche feste Gränze nicht angebbar, sei es nun, weil sie im Unendlichen liegt oder weil sie überhaupt unbestimmt ist, wie z. B. $Lim\, sin\,(mx + ny)$. Im ersten Falle nennen wir die unendliche Doppelreihe convergent und S ihre Summe, im zweiten Falle heifst die Reihe divergent und besitzt keine Summe. Die Verhältnisse der Convergenz und Divergenz gestalten

sich hier so eigenthümlich, dafs sie einer besonders genauen Untersuchung bedürfen.

I. Setzen wir die gegebene Doppelreihe als convergent voraus, so mufs jede einzelne einfache Reihe, welche man aus ihr herausgreifen kann, selbst convergiren, weil sie einen Bestandtheil jener Doppelreihe bildet; daher mufs jede der einfachen unendlichen Reihen, welche aus den horizontal neben einander oder vertikal unter einander stehenden Gliedern gebildet ist, ebenfalls convergent sein. Bezeichnen wir mit $s^{(m)}$ die Summe der m ersten unendlichen Horizontalreihen in No. (1), d. h. die Summe der m ersten Glieder der einfachen Reihe

$$(3)\quad \begin{array}{l} u_0 + u_1 + u_2 + \dots \\ \qquad + u_0' + u_1' + u_2' + \dots \\ \qquad\qquad + u_0'' + u_1'' + u_2'' + \dots \\ \qquad\qquad\qquad + \dots\dots \end{array}$$

(jede Zeile für ein Glied gerechnet), so ist $s^{(m)}$ die Gränze von $s_n^{(m)}$ für unendlich wachsende n, und lassen wir in $s^{(m)}$ auch m noch unendlich zunehmen, so geht $Lim\, s^{(m)}$ in S über. Bezeichnen wir auf gleiche Weise mit s_n die Summe der n ersten unendlichen Vertikalreihen, also die Summe der n ersten Glieder der vielfachen Reihe

$$(4)\quad \begin{array}{l} u_0 + u_0' + u_0'' + \dots \\ \qquad + u_1 + u_1' + u_1'' + \dots \\ \qquad\qquad + u_2 + u_2' + u_2'' + \dots \\ \qquad\qquad\qquad + \dots\dots \end{array}$$

(jede Zeile für ein Glied gerechnet), so ist s_n die Gränze von $s_n^{(m)}$ für unendlich wachsende m; lassen wir in s_n nachher auch n unendlich werden, so wird $Lim\, s_n = S$. Diefs giebt folgenden Satz:

> Wenn die unendliche Doppelreihe (1) convergirt und s ihre Summe heifst, so sind auch die Reihen (3) und (4) convergent und besitzen dieselbe Summe S.

II. Die soeben angestellten Betrachtungen setzten voraus, dafs die Convergenz der Doppelreihe (1) bekannt sei, und schliefsen von da auf die Convergenz derjenigen einfachen Reihen (3) und (4), welche entstehen, wenn man entweder jede Horizontalreihe oder jede Vertikalreihe als Glied einer neuen einfachen Reihe ansieht; es fragt sich nun, ob diese Schlüsse auch umgekehrt gelten, ob also aus der Convergenz der Reihen (3) und (4) die Convergenz der Doppelreihe nothwendig folgt. Die zur Beantwortung dieser Frage dienende Untersuchung ist folgende.

Wenn eine einfache Reihe convergirt, also die folgenden Gleichungen statt finden:

$$S_k = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{k-1}$$
$$Lim\, S_k = S$$
$$= U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots \text{ in inf.}$$

so folgt durch Subtraktion

$$S - S_k = U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \ldots$$

läfst man hier k ins Unendliche wachsen, so wird wegen $Lim\, S_k = S$,

$$0 = Lim\,\{U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \ldots\}$$

d. h. man kann bei einer convergenten Reihe $U_0 + U_1 + U_2 +$ etc. die Summe $U_k + U_{k+1} + U_{k+2} +$ etc. kleiner als jede angebbare Gröfse machen, wenn man nur k hinreichend grofs wählt. Diese einfache Bemerkung läfst sich in unserem Falle auf folgende Weise anwenden.

Aus der gegebenen Doppelreihe (1) bilden wir die Reihe der absoluten Werthe aller Reihenglieder, nämlich

$$
\begin{array}{llllllll}
(5)\; r_0 & + r_1 & + r_2 & + \ldots + r_{n-1} & + r_n & + r_{n+1} & + \ldots \\
+ r_0' & + r_1' & + r_2' & + \ldots + r_{n-1}' & + r_n' & + r_{n+1}' & + \ldots \\
+ r_0'' & + r_1'' & + r_2'' & + \ldots + r_{n-1}'' & + r_n'' & + r_{n+1}'' & + \ldots \\
\ldots & & & & & & \\
+ r_0^{(m-1)} & + r_1^{(m-1)} & + r_2^{(m-1)} & + \ldots + r_{n-1}^{(m-1)} & + r_n^{(m-1)} & + r_{n+1}^{(m-1)} & + \ldots \\
+ r_0^{(m)} & + r_1^{(m)} & + r_2^{(m)} & + \ldots + r_{n-1}^{(m)} & + r_n^{(m)} & + r_{n+1}^{(m)} & + \ldots \\
+ \ldots & & & & & &
\end{array}
$$

Setzen wir voraus, dafs die einfache Reihe der Horizontalcolonnen, also die Reihe

$$
\begin{array}{llll}
(6)\quad r_0 + r_1 + r_2 + \ldots & & & \\
& + r_0' + r_1' + r_2' + \ldots & & \\
& & + r_0'' + r_1'' + r_2'' + \ldots & \\
& & & + \ldots\ldots
\end{array}
$$

convergire, so kann nach dem ebenerwähnten Satze die Summe

$$
\begin{array}{lll}
(7)\quad r_0^{(m)} + r_1^{(m)} + r_2^{(m)} + \ldots & & \\
& + r_0^{(m+1)} + r_1^{(m+1)} + r_2^{(m+1)} + \ldots & \\
& & + \ldots\ldots
\end{array}
$$

bei wachsenden m kleiner als jede angebbare Zahl gemacht werden, und wenn wir also mit ε eine willkührliche Gröfse bezeichnen, so kann die vorstehende Summe unter $\frac{1}{2}\varepsilon$ verringert werden. Da ferner jedes einzelne Glied in No. (6) unter der gemachten Voraussetzung selbst eine convergente Reihe bilden mufs, so kann auch jede der Summen

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{llll} r_n & + r_{n+1} & + r_{n+2} & + \dots \\ r'_n & + r'_{n+1} & + r'_{n+1} & + \dots \\ r''_n & + r''_{n+1} & + r''_{n+1} & + \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r^{(m-1)}_n & + r^{(m-1)}_{n+1} & + r^{(m-1)}_{n+2} & + \dots \end{array}\right.$$

für sich betrachtet, unter jede beliebige Gröfse herabgebracht werden, wenn man n hinreichend wachsen läfst; demnach läfst sich jede solche Summe kleiner als $\frac{1}{2m}\varepsilon$ machen und mithin können die in No. (8) verzeichneten Glieder zusammen kleiner als $m \cdot \frac{1}{2m}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon$ werden. Fügen wir zu den in No. (8) enthaltenen Gliedern noch die in No. (7) stehenden hinzu, so folgt nunmehr, dafs die Gröfsen:

$$(9)\qquad \begin{array}{lllllll} & & & & r_n & + r_{n+1} & + \dots \\ & & & & r'_n & + r'_{n+1} & + \dots \\ & & & & r''_n & + r''_{n+1} & + \dots \\ & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & r^{(m-1)}_n & + r^{(m-1)}_{n+1} & + \dots \\ r^{(m)}_0 & + r^{(m)}_1 & + r^{(m)}_2 & + \dots & \dots & \dots & \dots \\ r^{(m+1)}_0 & + r^{(m+1)}_1 & + r^{(m+1)}_2 & + \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

zusammen genommen kleiner als die willkührliche Gröfse ε gemacht werden können. Das Aggregat der in (9) verzeichneten Glieder darf nun jedenfalls für eine Doppelreihe gelten, von welcher eine endliche Gliederanzahl $= 0$ und mithin ausgefallen ist; diese Doppelreihe mufs nothwendig convergiren, weil ihre Summe erstlich weniger als ε beträgt und weil sie zweitens nicht eine unbestimmte zwischen endlichen Gränzen hin- und her schwankende Gröfse (wie $\sin\infty$) sein kann, da sie sich im Gegentheile beliebig klein machen läfst. Fügen wir nun zu der unendlichen Doppelreihe (9) die endliche Doppelreihe

$$\begin{array}{llllll} & r_0 & + r_1 & + r_2 & + \dots & + r_{n-1} \\ + & r'_0 & + r'_1 & + r'_2 & + \dots & + r'_{n-1} \\ + & r''_0 & + r''_1 & + r''_2 & + \dots & + r''_{n-1} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ + & r^{(m-1)}_0 & + r^{(m-1)}_1 & + r^{(m-1)}_2 & + \dots & + r^{(m-1)}_{n-1} \end{array}$$

hinzu, so entsteht die Doppelreihe (5), welche nunmehr ebenfalls convergiren mufs. Unter Rücksicht auf das in No. I. bewiesene Theorem ergiebt sich jetzt der folgende wichtige Satz:

Wenn die absoluten Werthe der Glieder einer unendlichen Doppelreihe in Horizontalcolonnen gruppirt, convergente Reihen bilden und wenn zweitens die aus den einzelnen Horizontalcolonnen gebildete einfache Reihe wiederum convergirt, so ist auch die Doppelreihe convergent und es bleibt dann gleichgültig, ob man die Glieder in horizontaler oder vertikaler Richtung vereinigt.

Dafs dieses Theorem sogleich zu gelten aufhört, wenn die absoluten Werthe der einzelnen Glieder nicht mehr convergente Reihen liefern, wollen wir an dem folgenden lehrreichen Beispiele nachweisen. Die Doppelreihe sei

$$(10)\quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)-\ldots \\ +\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^2-\ldots \\ +\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^3-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^3+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^3-\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Die Summe der ersten Horizontalreihe ist hier, weil sich je zwei Glieder aufheben und zugleich eine unendliche Abnahme der Glieder statt findet:

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

Die Summe der zweiten Horizontalreihe ist auf gleiche Weise

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2$$

die Summe der dritten Horizontalreihe

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^3$$

u. s. w. Vereinigt man diese Summe wiederum, so ergiebt sich

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=+\frac{1}{2}.$$

Nehmen wir dagegen die Glieder der Doppelreihe erst in Vertikalcolonnen zusammen, so ist die erste derartige Colonne

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\right]=\frac{1}{2}$$

die Summe der zweiten Colonne

$$-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\dots\right]=-\frac{2}{3}$$

Die Summe der nächsten Colonne wäre $+\frac{2}{3}$, die der folgenden

$$-\frac{1}{4}\left[\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\dots\right]=-\frac{3}{4}$$

u. s. f. Durch Vereinigung dieser Vertikalreihen ergiebt sich

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}-\dots$$

und diefs ist keine convergente Reihe mehr, da sie keine bestimmte Summe hat; hört man nämlich mit einem positiven Gliede auf, so ist für ein positives ganzes k

$$S_{2k-1}=\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad Lim\, S_{2k-1}=\frac{1}{2}$$

schliefst man dagegen mit einem negativen Gliede, so ist

$$S_{2k-2}=\frac{1}{2}-\frac{k}{k+1}, \quad Lim\, S_{2k-2}=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

und die Reihe gehört demnach in die Kategorie der Reihen wie $1-1+1-1+$ etc., weil sie dieser immer ähnlicher wird, je weiter man geht. Das anscheinend befremdliche Resultat, dafs die Doppelreihe (10) *bei der einen* Anordnung convergent, bei der anderen divergent ist, erklärt sich sehr einfach, wenn man die Doppelreihe erst als endliche ansieht und ihre Summe aufsucht. Schliefsen wir die erste Horizontalreihe mit dem Gliede $-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ ab, so ist ihre Summe

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

die Summe der zweiten Horizontalreihe ist auf gleiche Weise

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

indem man so fortgeht, ist die Summe der $m$ten Horizontalreihe

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^m-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$$

Durch Vereinigung dieser m endlichen Horizontalreihen ergiebt sich

$$\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\dots+\left(1-\frac{1}{2}\right)^m\right]$$
$$-\frac{1}{n}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\dots+\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right]$$

oder

$$\frac{1}{2}\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1-\left(1-\frac{1}{2}\right)}-\frac{1}{n}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}-\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}$$

und diefs ist die Summe der endlichen Doppelreihe. Um hieraus die Summe der unendlichen Doppelreihe abzuleiten, mufs man m und n gleichzeitig ins Unendliche wachsen lassen und diefs giebt:

$$\frac{1}{2}-1+Lim\,Lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}$$

hier ist aber der Gränzwerth von $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}$ für gleichzeitig unendlich werdende n und m eine völlig unbestimmte Gröfse; läfst man erst n bei constanten m zunehmen, so ist

$$Lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}=1^{m+1}=1$$

also wenn nachher m unendlich wird

$$Lim\,Lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}=1.$$

Läfst man dagegen zuerst m bei unveränderten n wachsen, so wird

$$Lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}=0$$

mithin

$$Lim\,Lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}=0.$$

Man kann ebenso leicht jeden anderen Gränzwerth herausbringen; setzt man z. B. $m+1=kn$, wo k eine unveränderliche ganze positive Zahl bedeutet, so wächst m mit n gleichzeitig und es ist jetzt

$$Lim\,Lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}=Lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{kn}=e^{-k}$$

Die in No. (10) verzeichnete unendliche Doppelreihe hat demnach keine bestimmte Summe und ist folglich divergent, obgleich die einzelnen Horizontalcolonnen selbst convergiren und auch die Reihe ihrer Summen convergent ist; dagegen würden die absoluten Werthe der Reihenglieder nicht mehr convergente Reihen liefern und ebendefshalb besteht das vorhin ausgesprochene Theorem nicht mehr.

III. Es seien P und Q die Summen der beiden convergenten Reihen

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots$$
$$v_0+v_1+v_2+v_3+\cdots$$

von welchen wir voraussetzen, dafs sie auch dann noch convergiren,

wenn man die einzelnen Glieder auf ihre absoluten Werthe reduzirt; bildet man die Doppelreihe

$$\begin{array}{l} u_0v_0 + u_1v_0 + u_2v_0 + u_3v_0 + \ldots \\ \quad + u_0v_1 + u_1v_1 + u_2v_1 + \ldots \\ \qquad + u_0v_2 + u_1v_2 + \ldots \\ \qquad\quad + u_0v_3 + \ldots \\ \qquad\qquad + \ldots \end{array}$$

so ist jede der hier vorkommenden Horizontalreihen convergent, und zwar hat die erste $v_0 P$, die zweite $v_1 P$, die dritte $v_2 P$ etc. zur Summe; ferner convergirt auch die Reihe dieser Summen, denn

$$v_0P + v_1P + v_2P + v_3P + \ldots$$

ist das Produkt aus P und der als convergent vorausgesetzten Summe. Nach dem Theoreme in II. convergirt nunmehr auch die obige Doppelreihe und darf in Vertikalcolonnen geordnet werden, d. h. die neue Reihe

$$\begin{array}{l} u_0v_0 \\ + u_1v_0 + u_0v_1 \\ \qquad + u_2v_0 + u_1v_1 + u_0v_2 \\ \qquad\qquad + \ldots \end{array}$$

convergirt unter den gemachten Voraussetzungen und hat PQ zur Summe. Es führt so die Betrachtung der Doppelreihen auf das Theorem in §. 34, II. zurück.

Capitel VIII.

Das Binomialtheorem.

§. 37.

Aufgabe der binomischen Entwickelung.

Schon bei der geometrischen Darstellung der Funktionen wiesen wir darauf hin, dafs sich einige der einfachsten Funktionen zu einer etwas allgemeineren Funktion zusammenfassen lassen, von welcher jene spezielle Fälle darstellen, wir bemerkten, dafs die allgemeinere Form $a + bx$ die besonderen Formen $a + x$, $a - x$ und bx in sich enthalte. Derselbe Gedanke läfst sich noch etwas weiter ausführen; giebt man nämlich den fünf einfachsten Funktionen $a + x$, $a - x$, bx, $\frac{c}{x}$ und x^μ die folgenden Gestalten.

$$[a + (+1)\,x]^1, \quad [a + (-1)\,x]^1, \quad [0 + bx]^1$$
$$\left[0 + \frac{1}{c}\,x\right]^{-1}, \quad [0 + (+1)\,x]^\mu$$

so erkennt man in ihnen spezielle Fälle der allgemeineren Funktion

$$(1) \qquad (\alpha + \beta x)^\mu$$

und es ist unmittelbar einleuchtend, dafs die Betrachtung dieser Funktion auch zu allgemeineren Resultaten führen mufs, als die Untersuchung jener besonderen Formen. Wir stellen uns daher gleich die umfassendere Aufgabe einer Entwickelung der Eigenschaften, welche der unter No. (1) verzeichneten Funktion zukommen.

Der nächste Schritt zur Lösung dieses Problemes besteht in einer Umwandlung des obigen Ausdrucks, welche eine einfachere Form derselben darbietet; es ist nämlich

$$(2) \qquad (\alpha + \beta x)^\mu = \left[\alpha\left(1 + \frac{\beta x}{\alpha}\right)\right]^\mu = \alpha^\mu \left(1 + \frac{\beta x}{\alpha}\right)^\mu$$

Diese Umbildung könnte nur in dem Falle $\alpha = 0$ unthunlich erscheinen, aber auch selbst dieser beeinträchtigt die Allgemeinheit nicht, denn man kann sich die Null als Gränze einer unendlich abnehmenden Gröfse α denken und dann gilt offenbar die Gleichung

$$(\beta x)^\mu = Lim \left[\alpha^\mu \left(1 + \frac{\beta x}{\alpha}\right)^\mu\right]$$

worin sich das Zeichen *Lim* auf das Verschwinden von α bezieht; es erscheint demnach jener Ausnahmefall als Gränzfall und mithin als spezieller Fall der Funktion

$$\alpha^\mu \left(1 + \frac{\beta x}{\alpha}\right)^\mu$$

Näher angesehen besteht diese Funktion aus einem constanten Faktor (α^μ) und dem veränderlichen Faktor

$$(3) \qquad \left(1 + \frac{\beta x}{\alpha}\right)^\mu$$

der letztere ist es allein, welcher unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nimmt, denn nur er bildet eine Funktion von x, während der Faktor α^μ die untergeordnete Rolle eines unwandelbaren Begleiters spielt. Wenn nun x das ganze Gebiet der positiven und negativen Zahlen durchläuft, so ist diefs auch mit $\frac{\beta x}{\alpha}$ der Fall; bezeichnen wir also diesen Quotienten mit z, so dürfen wir nunmehr z als die unabhängige Variabele ansehen und demnach ist es in letzter Instanz die Funktion

$$(4) \qquad (1 + z)^\mu$$

auf deren Untersuchung es ankommen würde.

Bleiben wir zunächst bei dem einfachsten Falle stehen, wenn μ eine ganze positive Zahl m bezeichnet, so ist die Funktion $(1+z)^m$ gleich dem Produkte aus m Faktoren, deren jeder $= 1 + z$ ist. Diese Multiplikation läfst sich in jedem Falle nach den Regeln der Buchstabenrechnung ausführen, und zwar gäbe diefs folgende fortlaufende Rechnung:

	$(1+z)^1 =$	$1 + 1 \cdot z$
mit		$1 + z$ multiplizirt
	giebt	$1 + 1 \cdot z$
		$+ 1 \cdot z + 1 \cdot z^2$
	$(1+z)^2 =$	$1 + 2 \cdot z + 1 \cdot z^2$
mit		$1 + z$ multiplizirt
	giebt	$1 + 2 \cdot z + 1 \cdot z^2$
		$+ 1 \cdot z + 2 \cdot z^2 + 1 \cdot z^3$
	$(1+z)^3 =$	$1 + 3 \cdot z + 3 \cdot z^2 + 1 \cdot z^3$
mit		$1 + z$ multiplizirt
	giebt	$1 + 3 \cdot z + 3 \cdot z^2 + 1 \cdot z^3$
		$+ 1 \cdot z + 3 \cdot z^2 + 3 \cdot z^3 + 1 \cdot z^4$
	$(1+z)^4 =$	$1 + 4 \cdot z + 6 \cdot z^2 + 4 \cdot z^3 + 1 \cdot z^4$
		u. s. w.

Aus dem Gange dieser Multiplikation erhellt zunächst, dafs die Potenzen von z regelmäfsig aufsteigen, nämlich von $z^0 = 1$ bis zu einer Potenz, deren Exponent derselbe ist wie der des links stehenden $1 + z$, dafs also

(5) $$(1+z)^m = 1 + m_1 z + m_2 z^2 + m_3 z^3 + \ldots + m_m z^m$$

sein würde, worin $m_1, m_2, m_3, \ldots m_m$ gewisse Zahlen bedeuten, welche nicht von z, sondern nur von m abhängen, und die Binomialcoeffizienten heifsen mögen. Man bemerkt leicht das Gesetz, nach welchem sich diese Zahlen bilden, es spricht sich nämlich in dem folgenden Schema aus, welches von dem vorigen Multiplikationsschema durch Weglassung der Potenzen von z abgeleitet ist:

I;	1,	1				
		1,	1	addirt		
II;	1,	2,	1			
		1,	2,	1	addirt	
III;	1,	3,	3,	1		
		1,	3,	3,	1	addirt
IV;	1,	4,	6,	4,	1	
		u. s. w.				

Hierin geben die römischen Ziffern den Exponenten m an, zu welchem die nebenstehenden Binomialcoeffizienten gehören. Beachtet man, dafs jede von der Zahlenreihe, welche addirt wird, mit der vorhergehenden identisch, aber um eine Stelle weiter geschoben ist, so erkennt man auf der Stelle das Bildungsgesetz der Binomialcoeffizienten in seiner einfachsten Form; jeder Binomialcoeffizient entsteht nämlich durch Addition zweier Coeffizienten aus der vorhergehenden Reihe, von denen einer mit ihm in derselben Vertikalcolonne und der andere daneben steht (z. B. $IV_2 = III_2 + III_1$), und es läfst sich diese Regel allgemein in der Formel

$$(6) \qquad (m+1)_k = m_k + m_{k-1}$$

aussprechen; dieselbe besteht auch für $k = 1$, wenn man m_0 für 1 rechnet, was mit Rücksicht darauf, dafs in No. (5) z^0 den Coeffizienten 1 besitzt, ganz in der Ordnung ist; auch kann man die Formel für $k = 0$ benutzen, indem man m_{-1} (und ebenso m_{-2}, m_{-3} etc.) $= 0$ setzt, was insofern mit der Gleichung (5) übereinstimmt, als darin die Potenzen

$$z^{-1} = \frac{1}{z}, \quad z^{-2} = \frac{1}{z^2}, \quad z^{-3} = \frac{1}{z^3}, \ldots$$

nicht vorkommen und mithin ihre Coeffizienten Null sein müssen. Nach diesen Erörterungen hat es keine Schwierigkeit, die folgende schon für sich verständliche Tabelle der Binomialcoeffizienten zu entwerfen:

$m =$ $k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
I	1	1							
II	1	2	1						
III	1	3	3	1					
IV	1	4	6	4	1				
V	1	5	10	10	5	1			
VI	1	6	15	20	15	6	1		
VII	1	7	21	35	35	21	7	1	
VIII	1	8	28	56	70	56	28	8	1

u. s. w.

Durch die Construktion dieser Tafel für m_k sind wir nun zwar zu einer Auflösung unseres Problemes für den Fall eines ganzen positiven Exponenten gelangt, aber wir werden uns bei einiger Aufmerksamkeit gestehen müssen, dafs diese Lösung noch sehr mangelhaft ist. Denn selbst abgesehen davon, dafs wir noch gar nicht wissen, wie der Fall eines nicht ganzen positiven Exponenten zu behandeln wäre, so hat unsere Lö-

sung schon darin eine bedeutende Unvollkommenheit, dafs wir den Werth eines Binomialcoefficienten nicht unmittelbar angeben können, sondern dafs zu seiner Berechnung die Kenntnifs der vorhergehenden Coefficienten erforderlich ist (um z. B. X_3 zu finden, müfste man die Tabelle erst bis $m = X$ fortsetzen). Die nächste Aufgabe mufs daher sein, das Gesetz zu entdecken, nach welchem sich irgend ein beliebig aus der Reihe herausgegriffener Coefficient m_k aus dem Exponenten m und seinem Stellenzeiger k bildet, so dafs es nachher möglich wäre, jeden beliebigen Coefficienten unmittelbar und ohne Rücksicht auf seine Vorgänger hinzuschreiben. Da wir schon die Tabelle der Binomialcoefficienten besitzen und sie jeden Augenblick beliebig weit fortsetzen können, so ist es das Natürlichste, zunächst durch Vergleichung der vorhandenen Zahlen sich auf das Bildungsgesetz hinführen zu lassen und dann eine Bestätigung desselben auf anderem Wege zu suchen, ein Verfahren, welches sehr häufig mit dem besten Erfolge angewendet wird.

Die Zahlen unter der Überschrift 0 sind sämmtlich $= 1$, dafs sie es sein müssen, erhellt unmittelbar aus der Bemerkung, dafs die Reihe (5) mit 1 anfängt; es ist demnach

$$m_0 = 1.$$

Die Zahlen der nächsten Vertikalcolonne sind dem jedesmaligen Exponenten gleich und diefs folgt aus dem Gange der successiven Multiplikation, bei welcher jene Zahlen aus einer fortgesetzten Addition der Einheit entstehen, also

$$m_1 = m.$$

Die Zahlen unter der Rubrik 2 können folgendermafsen geschrieben werden:

$$1 = \frac{2 \cdot 1}{2}, \quad 3 = \frac{3 \cdot 2}{2}, \quad 6 = \frac{4 \cdot 3}{2}, \quad 10 = \frac{5 \cdot 4}{2}, \quad 15 = \frac{6 \cdot 5}{2}, \ldots$$

und daraus scheint hervorzugehen, dafs überhaupt

$$m_2 = \frac{m(m-1)}{2}$$

ist. Giebt man den Zahlen der nächsten Colonne die Formen

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3}, \quad \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3}, \quad \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 3}, \quad \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3}, \quad \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3}, \ldots$$

so scheint sich in ihnen das Bildungsgesetz

$$m_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$$

auszusprechen. Für die unter der Rubrik 4 stehenden Coefficienten müfste demnach die Form

$$m_4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

richtig sein, und in der That passen darauf die Zahlen 1, 5, 15, 35 etc., wenn $m = 4, 5, 6, 7, \ldots$ gesetzt wird. Demzufolge scheint das Bildungsgesetz

$$(7) \qquad m_k = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-\overline{k-1})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots k}$$

statt zu finden und die Formel (5) würde demgemäfs lauten:

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\overline{m-1})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m}z^m$$

Es wäre nun noch die Hauptfrage zu erörtern, ob das hypothetisch angenommene Bildungsgesetz der Coeffizienten richtig ist; zu einer derartigen Controle bietet sich folgendes Mittel als einfachstes dar. Man abstrahire von der linken Seite der vorstehenden Gleichung und versuche die rechter Hand stehende ihrer Form nach völlig bestimmte Reihe zu summiren; erhält man hierbei $(1+z)^m$ zur Summe, so ist jenes angenommene Bildungsgesetz das richtige. Um aber diesen Gedanken nicht in so beschränkter Weise auszuführen, fragen wir allgemeiner, welche ist die Summe der Reihe

$$(8) \qquad 1 + \frac{\mu}{1}z + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2}z^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^3 + \ldots$$

worin μ und z ganz beliebige Zahlen bedeuten.

Diese umfassendere Aufgabe reduzirt sich bei ganzen positiven $\mu = m$ auf die vorige, weil dann die Reihe irgendwo abbricht. Für jedes andere μ dagegen verschwindet keines ihrer Glieder, die Reihe wird unendlich und hat nur dann eine Summe, wenn sie convergirt. Die Bedingungen aber, unter welchen die Convergenz statt findet, haben wir bereits in §. 33, III. entwickelt und sie dienen uns als Basis für die weitere Betrachtung.

§. 38.

Summirung der Binomialreihe.

Die Summe der entweder endlichen oder unendlichen und dann als convergent vorausgesetzten Reihe (7) wird offenbar eine gewisse Funktion der beiden Veränderlichen μ und z sein; die Aufgabe, jene Reihe zu summiren, kommt demnach auf die andere zurück, die Natur einer noch unbekannten Funktion zu bestimmen. Diese Bestimmung müfste entweder aus speziellen Werthen oder aus Eigenschaften der Reihe geschehen; das

Erste geht hier defswegen nicht, weil wir bei der gänzlichen Unbestimmtheit des μ und z keine speziellen Werthe bekommen können, wir müssen uns also an die zweite Weise halten. Dadurch scheint eine nicht unbedeutende Schwierigkeit in die Untersuchung zu gerathen, weil wir noch gar keine Eigenschaften der fraglichen Reihe kennen, die wir zur Bestimmung der ihr gleichen Funktion benutzen könnten. Indessen leitet folgende Bemerkung auf die Spur einer solchen. Wenn unsere hypothetisch angenommene Form der Coeffizienten die richtige wäre, so würde für $\mu =$ einer ganzen positiven Zahl m, die fragliche Funktion in $(1+z)^m$ übergehen müssen. Diese Funktion hat aber eine ganz charakteristische Eigenschaft, nämlich die, dafs für jedes α und β

$$(1+z)^\alpha (1+z)^\beta = (1+z)^{\alpha+\beta}$$

ist, aus der sich umgekehrt auch die Natur der Funktion bestimmen läfst. Bezeichnen wir also mit $f(m)$ die Summe der Reihe $1+\frac{m}{1}z+\ldots+z^m$, so mufs diese Funktion die Eigenschaft $f(\alpha)f(\beta)=f(\alpha+\beta)$ haben, vorausgesetzt, dafs das angenommene Bildungsgesetz richtig ist. Könnten wir nun umgekehrt zeigen, dafs die Summe $f(m)$ der fraglichen Reihe diese Eigenschaft habe, so würde sich mit Hülfe von §. 25. daraus die Form der Funktion $f(m)$, d. h. die Summe jener Reihe bestimmen lassen. Diesen Gedanken wollen wir auszuführen suchen.

Sei also

$$(1)\quad f(\mu) = 1+\frac{\mu}{1}z+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}z^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}z^3+\ldots$$

worin z beliebig ist, sobald μ eine ganze positive Zahl bedeutet, dagegen zwischen $+1$ und -1 liegen mufs, wenn μ andere als positive ganze Werthe hat. Bezeichnen wir die Coeffizienten der Reihe nach mit μ_0, μ_1, μ_2 etc., wo nun diese Gröfsen nicht die wahren, sondern unsere hypothetisch angenommenen Binomialcoeffizienten bedeuten, so ist für jedes ganze positive n,

$$(2)\quad \mu_0 = 1,\quad \mu_{n+1} = \frac{\mu-n}{n+1}\mu_n,$$

wodurch das Bildungsgesetz der Coeffizienten vollkommen bestimmt ist.

Schreiben wir diese Reihen für zwei andere beliebige Gröfsen α und β statt μ hin, so haben wir

$$(3)\quad f(\alpha) = \alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\alpha_3 z^3+\ldots$$

$$\alpha_0 = 1,\quad \alpha_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1}\alpha_n$$

$$(4)\quad f(\beta) = \beta_0+\beta_1 z+\beta_2 z^2+\beta_3 z^3+\ldots$$

$$\beta_0 = 1,\quad \beta_{n+1} = \frac{\beta-n}{n+1}\beta_n$$

und durch Multiplikation beider Reihen

$$f(\alpha)\,f(\beta) = \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)\,z$$
$$+ (\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0)\,z^2$$
$$+ (\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_0)\,z^3 + \dots$$

Bezeichnen wir die Coefficienten dieser neuen Reihe mit $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ so ist

(5) $$f(\alpha)\,f(\beta) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z^3 + \dots$$

und für jedes ganze positive n,

(6) $$\gamma_n = \alpha_n\beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \alpha_{n-2}\beta_2 + \dots + \alpha_1\beta_{n-1} + \alpha_0\beta_n,$$

ebenso

(7) $$\gamma_{n+1} = \alpha_{n+1}\beta_0 + \alpha_n\beta_1 + \alpha_{n-1}\beta_2 + \dots + \alpha_1\beta_n + \alpha_0\beta_{n+1}$$

Es gelten nun offenbar folgende Gleichungen:

$$\frac{\alpha+\beta-n}{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1} + \frac{\beta}{n+1}$$
$$= \frac{\alpha-\overline{n-1}}{n+1} + \frac{\beta-1}{n+1}$$
$$= \frac{\alpha-\overline{n-2}}{n+1} + \frac{\beta-2}{n+1}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$= \frac{\alpha-1}{n+1} + \frac{\beta-\overline{n-1}}{n+1}$$
$$= \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta-n}{n+1}$$

Multiplizirt man hiermit die Gleichung (6) und wendet im ersten Gliede die erste, im zweiten Gliede die zweite Form u. s. f. an, so ergiebt sich:

$$\frac{\alpha+\beta-n}{n+1}\gamma_n = \frac{\alpha-n}{n+1}\alpha_n\beta_0 + \frac{\beta}{n+1}\alpha_n\beta_0$$
$$+ \frac{\alpha-\overline{n-1}}{n+1}\alpha_{n-1}\beta_1 + \frac{\beta-1}{n+1}\alpha_{n-1}\beta_1$$
$$+ \frac{\alpha-\overline{n-2}}{n+1}\alpha_{n-2}\beta_2 + \frac{\beta-2}{n+1}\alpha_{n-2}\beta_2$$
$$+ \dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{\alpha-1}{n+1}\alpha_1\beta_{n-1} + \frac{\beta-\overline{n-1}}{n+1}\alpha_1\beta_{n-1}$$
$$+ \frac{\alpha}{n+1}\alpha_0\beta_n + \frac{\beta-n}{n+1}\alpha_0\beta_n$$

Ferner ist für jedes ganze positive p

$$\frac{\mu-p}{p+1}\mu_p = \mu_{p+1}, \text{ folglich } (\mu-p)\,\mu_p = (p+1)\,\mu_{p+1}$$

und diese Formel hat man hier in jedem Gliede anzuwenden Gelegenheit; in der ersten Vertikalreihe für $\mu = \alpha$ und $p = n, n-1, n-2, \ldots 1, 0$ und in der zweiten für $\mu = \beta$ und $p = 0, 1, 2, \ldots n-1, n$. Hierdurch erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha+\beta-n}{n+1}\gamma_n = \alpha_{n+1}\beta_0 &+ \frac{1}{n+1}\alpha_n\beta_1 \\ + \frac{n}{n+1}\alpha_n\beta_1 &+ \frac{2}{n+1}\alpha_{n-1}\beta_2 \\ + \frac{n-1}{n+1}\alpha_{n-1}\beta_2 &+ \frac{3}{n+1}\alpha_{n-2}\beta_3 \\ + \ldots\ldots\ldots \\ + \frac{2}{n+1}\alpha_2\beta_{n-1} &+ \frac{n}{n+1}\alpha_1\beta_n \\ + \frac{1}{n+1}\alpha_1\beta_n &+ \alpha_0\beta_{n+1}\end{aligned}$$

oder, wenn man die Glieder diagonal zusammennimmt,

$$\frac{\alpha+\beta-n}{n+1}\gamma_n$$
$$= \alpha_{n+1}\beta_0 + \alpha_n\beta_1 + \alpha_{n-1}\beta_2 + \ldots + \alpha_1\beta_n + \alpha_0\beta_{n+1}$$

d. h. nach Formel (7)

$$\frac{\alpha+\beta-n}{n+1}\gamma_n = \gamma_{n+1}$$

und diefs gilt für jedes beliebige α und β, weil die ganze Demonstration auf rein identischen Transformationen beruht. Setzt man der Reihe nach $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$, so erhält man

$$\gamma_1 = \frac{\alpha+\beta}{1}\gamma_0$$
$$\gamma_2 = \frac{\alpha+\beta-1}{2}\gamma_1 = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{1.2}\gamma_0$$
$$\gamma_3 = \frac{\alpha+\beta-2}{3}\gamma_2 = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{1.2.3}\gamma_0$$

u. s. f.

Es ist aber $\gamma_0 = \alpha_0\beta_0 = 1 . 1$; führt man nun die Werthe von γ_0, γ_1, γ_2 etc. in die Gleichung (5) ein, so wird

$$f(\alpha)\,f(\beta) =$$
$$1 + \frac{\alpha+\beta}{1}z + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{1.2}z^2 + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{1.2.3}z^3 + \ldots$$

Vergleicht man die hier stehende Reihe mit der in (1), so übersieht man, dafs sie aus derselben hervorgeht, wenn $\mu = \alpha + \beta$ gesetzt wird; ihre Summe ist also $f(\alpha+\beta)$ und folglich haben wir die Gleichung

$$f(\alpha)\,f(\beta) = f(\alpha + \beta).$$

Wir kennen aber bereits die Form derjenigen Funktion, welcher diese Eigenschaft zukommt, dieselbe ist nämlich

$$f(\mu) = a^\mu$$

worin der Werth der Constanten a durch die Gleichung $a = f(1)$ bestimmt wird. Nehmen wir in der Gleichung (1) $\mu = 1$, so wird für unseren Fall $a = f(1) = 1 + z$, folglich

$$f(\mu) = (1 + z)^\mu$$

und hiermit ist für jedes μ die Summe der als convergent vorausgesetzten Reihe (1) gefunden. Fügen wir noch die Bedingung der Convergenz bei, so ist

$$(8) \qquad (1+z)^\mu$$
$$= 1 + \frac{\mu}{1} z + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} z^3 + \dots$$
$$+1 > z > -1$$

wobei die Bestimmung $+1 > z > -1$ nur für den Fall eines nicht ganzen und positiven μ gilt, weil im letzteren Falle die Reihe eine endliche für jedes z gültige ist.

§. 39.

Folgerungen aus dem Vorigen.

Die Formel (8), welche den Namen des allgemeinen Binomialtheoremes führt, ist die Basis für eine Reihe der wichtigsten Untersuchungen, die wir später durchführen werden. Für jetzt betrachten wir nur die nächsten Folgerungen aus ihr.

I. Nehmen wir

$$z = \frac{bx}{a}$$

und multipliziren die so entstandene Gleichung

$$\left(1 + \frac{bx}{a}\right)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}\frac{bx}{a} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \dots$$

mit a^μ, so ergiebt sich die allgemeinere Gleichung

$$(1) \qquad (a+bx)^\mu =$$
$$a^\mu + \frac{\mu}{1} a^{\mu-1} bx + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} a^{\mu-2} (bx)^2$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} a^{\mu-3} (bx)^3 + \dots$$

Sie gilt für alle Werthe von a, b und x, wenn μ eine ganze positive Zahl, mithin die Reihe eine endliche ist, aufserdem aber mufs die Bedingung

$$1 > \frac{bx}{a} > -1$$

erfüllt sein, wenn die Gleichung (1) bestehen soll.

Setzt man erst bei positiven und dann bei negativen μ einmal $a = 1$, $b = +1$, dann $a = 1$, $b = -1$, so entstehen folgende vier Formeln:

(2) $$(1 + x)^{\mu} =$$
$$1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu - 1)}{1 \, . \, 2}x^2 + \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}x^3 + \ldots$$

(3) $$(1 - x)^{\mu} =$$
$$1 - \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu - 1)}{1 \, . \, 2}x^2 + \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}x^3 + \ldots$$

(4) $$(1 + x)^{-\mu} =$$
$$1 - \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu + 1)}{1 \, . \, 2}x^2 - \frac{\mu(\mu + 1)(\mu + 2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}x^3 + \ldots$$

(5) $$(1 - x)^{-\mu} =$$
$$1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu + 1)}{1 \, . \, 2}x^2 + \frac{\mu(\mu + 1)(\mu + 2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}x^3 + \ldots$$

mit der gemeinschaftlichen Bedingung

$$1 > x > -1.$$

Als spezieller Fall ist hier noch die Annahme $\mu = \frac{1}{2}$ von Interesse; man findet damit für $1 > x > -1$

(6) $$(1 + x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + x}$$
$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1\,x^2}{2\,4} + \frac{1 \, . \, 3\,x^3}{2 \, . \, 4\,6} - \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5\,x^4}{2 \, . \, 4 \, . \, 6\,8} + \ldots$$

(7) $$(1 - x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 - x}$$
$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{1\,x^2}{2\,4} - \frac{1 \, . \, 3\,x^3}{2 \, . \, 4\,6} - \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5\,x^4}{2 \, . \, 4 \, . \, 6\,8} - \ldots$$

(8) $$(1 + x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x}}$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4}x^2 - \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5}{2 \, . \, 4 \, . \, 6}x^3 + \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, 7}{2 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, 8}x^4 - \ldots$$

(9) $$(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4}x^2 + \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5}{2 \, . \, 4 \, . \, 6}x^3 + \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, 7}{2 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, 8}x^4 + \ldots$$

Eine bemerkenswerthe Umgestaltung der Formel (5) liefert die Substitution

$$x = \frac{z}{1 + z}$$

wo nun z jede beliebige positive Zahl bedeuten kann, weil dann x immer zu einem ächten Bruche wird; es ergiebt sich nämlich unter der Bemerkung, dafs

$$(1-x)^{-\mu} = \left(1 - \frac{z}{1+z}\right)^{-\mu} = \left(\frac{1}{1+z}\right)^{-\mu} = (1+z)^{+\mu}$$

ist, die nachstehende Formel

(10) $$(1+z)^{\mu} =$$

$$1 + \frac{\mu}{1}\left(\frac{z}{1+z}\right) + \frac{\mu(\mu+1)}{1\,.\,2}\left(\frac{z}{1+z}\right)^2 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{z}{1+z}\right)^3 + \ldots$$

$$\infty > z > 0$$

deren Brauchbarkeit darin liegt, dafs dem z der grofse Spielraum des positiven Zahlengebietes gelassen ist; für ganze negative μ bricht die Reihe ab.

II. Von den hier entwickelten Formeln läfst sich ein vortheilhafter Gebrauch zur Ausziehung der Wurzeln beliebig hoher Grade machen, indem man wie folgt, verfährt.

Wenn aus der gegebenen Zahl Z die $m$te Wurzel gezogen werden soll, so zerlege man Z so in zwei Theile a und b, dafs sich aus a die $m$te Wurzel ziehen läfst, oder mit anderen Worten, man suche diejenige nächst kleinere Zahl a auf, welche eine $m$te Potenz ist; man hat alsdann

$$Z = a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

mithin

$$\sqrt[m]{Z} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{\left(1+\frac{b}{a}\right)} = \sqrt[m]{a}\,.\,\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}$$

und hier kann man den Ausdruck $\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}$ nach einer der Formeln (2) oder (10) behandeln; so ist z. B.

$$\sqrt{11} = \sqrt{9+2} = 3\,.\,\sqrt{1+\frac{2}{9}} = 3\,.\,\left(1+\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3\,.\,\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9} - \frac{1}{2\,.\,4}\left(\frac{2}{9}\right)^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\left(\frac{2}{9}\right)^3 - \ldots\right]$$

ferner nach No. (10)

$$\sqrt{50} = \sqrt{49+1} = 7\,.\,\left(1+\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 7\,.\,\left[1 + \frac{1}{2}\frac{1}{50} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\left(\frac{1}{50}\right)^2 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\left(\frac{1}{50}\right)^3 + \ldots\right]$$

Liegt Z nahe an der nächst gröfseren Zahl A, die eine $m$te Potenz bildet, so ist es vortheilhafter,

$$Z = A - b = A\left(1 - \frac{b}{A}\right)$$

zu setzen, woraus

$$\sqrt[m]{Z} = \sqrt[m]{A} \cdot \left(1 - \frac{b}{A}\right)^{\frac{1}{m}}$$

folgt, und nun die Formel (3) in Anwendung zu bringen; z. B.

$$\sqrt[3]{123} = \sqrt[3]{125 - 2} = 5 \cdot \left(1 - \frac{2}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 5 \cdot \left[1 - \frac{1}{3}\frac{2}{125} - \frac{2}{3 \cdot 6}\left(\frac{2}{125}\right)^2 - \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9}\left(\frac{2}{125}\right)^3 - \ldots\right]$$

Man wird leicht bemerken, dafs nach diesem Verfahren das Ausziehen der Wurzeln beliebiger Grade um so leichter wird, je gröfser die Zahl Z ist; von Vortheil sind dabei Tafeln der Potenzen der gewöhnlichen Zahlen, um aus ihnen sogleich a oder A entnehmen zu können.

§. 40.

Die Eigenschaften der Binomialcoeffizienten.

I. Dafs bei ganzen positiven Exponenten zwei benachbarte Binomialcoeffizienten zusammen wieder einen Binomialcoeffizienten und zwar einen des nächst höheren Exponenten geben, ist bereits in No. (6) des §. 37. bemerkt worden; es besteht aber diese Eigenschaft auch *allgemeiner*, denn man hat

$$\mu_{n-1} + \mu_n = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+2)(\mu-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\,n}$$

oder wenn man Alles auf gleichen Nenner bringt,

(1) $$\mu_{n-1} + \mu_n$$
$$= \frac{[n + \mu - n + 1]\,\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$
$$= \frac{(\mu+1)(\mu+1-1)(\mu+1-2)\ldots(\mu+1-\overline{n-1})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$
$$= (\mu+1)_n$$

Übrigens erscheint der Satz auch als spezieller Fall des in §. 38. bewiesenen allgemeineren Theoremes

(2) $$(\alpha+\beta)_n$$
$$= \alpha_n\beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \alpha_{n-2}\beta_2 + \ldots + \alpha_1\beta_{n-1} + \alpha_0\beta_n$$

wenn man darin $\alpha = \mu$ und $\beta = 1$ setzt, wodurch sich die Reihe rechter Hand auf ihre beiden ersten Glieder reduzirt.

II. Für einen ganzen positiven Exponenten $\mu = m$ ist die Anzahl

der Binomialcoeffizienten begränzt, und zwar $= m + 1$; die Tafel der Coeffizienten läfst vermuthen, dafs die von Anfang und Ende gleich weit entfernten Coeffizienten gleich sind, nämlich

$$m_0 = m_m, \quad m_1 = m_{m-1}, \quad m_2 = m_{m-2}, \text{ etc.}$$

überhaupt

$$m_k = m_{m-k} \tag{3}$$

Diefs erkennt man auch leicht aus dem Bildungsgesetze der fraglichen Coeffizienten; es ist nämlich

$$m_{m-k} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-\overline{m-k}+1)}{1.2.3\dots(m-k)}$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\dots(k+1)}{1.2.3\dots(m-k)}$$

Dafür läfst sich schreiben

$$m_{m-k} = \frac{m(m-1)\dots(m-\overline{k-1})(m-k)(m-\overline{k+1})\dots(k+1)}{1.2\dots k(k+1)(k+2)\dots(m-k)}$$

und wenn man die im Zähler vorkommende Faktorenreihe

$$(m-k)(m-\overline{k+1})\dots(k+2)(k+1)$$

gegen die im Nenner befindliche umgekehrte Faktorenreihe

$$(k+1)(k+2)\dots(m-k-1)(m-k)$$

hebt, so bleibt übrig

$$m_{m-k} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-\overline{k-1})}{1.2.3\dots k} = m_k$$

übereinstimmend mit No. (3).

Für ein ungerades m ist die Anzahl der Binomialcoeffizienten gerade, und mithin kommt jeder Coeffizient zweimal vor; bei geradem m dagegen ist die Anzahl der Binomialcoeffizienten ungerade, und folglich giebt es dann einen mittelsten Binomialcoeffizienten.

Von diesem mittelsten Binomialcoeffizienten gilt eine interessante Beziehung; setzen wir nämlich in No. (2) $\alpha = \beta = n$, so folgt

$$(2n)_n = n_n n_0 + n_{n-1} n_1 + n_{n-2} n_2 + \dots + n_0 n_n$$

oder, weil $n_n = n_0$, $n_{n-1} = n_1$, $n_{n-2} = n_2$ u. s. w. ist,

$$(2n)_n = (n_0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2 + \dots + (n_n)^2 \tag{4}$$

d. h. die Quadratsumme aller Binomialcoeffizienten eines ganzen positiven Exponenten ist gleich dem mittelsten Binomialcoeffizienten des doppelten Exponenten.

III. Nach dem in §. 35, I. bewiesenen Satze dürfen wir die Gültigkeit des Binomialtheoremes auch für die Fälle $x = +1$ und $x = -1$ in Anspruch nehmen, sobald die Reihe noch convergirt; so erhalten wir aus Formel (2) des vorigen Paragraphen für $x = +1$

(5) $$2^{\mu} = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots$$

und diese Gleichung für jedes ganze positive μ, aufserdem aber ist sie an die Bedingung

$$\infty > \mu > -1$$

gebunden. Ebenso leicht ergiebt sich für $x = -1$

(6) $$0 = \mu_0 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 + \cdots$$

gültig für jedes ganze positive μ und sonst unter der Bedingung

$$\infty > \mu > 0.$$

Die Gleichung (6) besteht, wie auch die angegebene Bedingung sagt, für $\mu = 0$ nicht, denn es ist dann

$$(1-x)^0 = 1$$

und diefs gilt für jedes x, also auch für $x = -1$; dasselbe giebt die Reihe (6), indem sie sich für $\mu = 0$ auf ihr erstes Glied $0_0 = 1$ reduzirt.

Nicht ohne Interesse ist es, die etwas zusammengesetztere Reihe

$$n_n m_n - (n+1)_n m_{n+1} + (n+2)_n m_{n+2} - \ldots$$

zu betrachten, in welcher m und n ganze positive Zahlen bedeuten mögen; sie bricht ab, sobald einer der Indices von m selbst $= m$ geworden ist. Schreiben wir nämlich die Reihe in der Form

$$n_0 m_n - (n+1)_1 m_{n+1} + (n+2)_2 m_{n+2} - \ldots$$

setzen für n_0, $(n+1)_1$, $(n+2)_2$, ... ihre Werthe und drücken m_{n+1}, m_{n+2}, ... durch m_n aus, so finden folgende Beziehungen statt:

$$n_0 m_n = (m-n)_0 m_n$$

$$(n+1)_1 m_{n+1} = \frac{n+1}{1} \cdot \frac{m-n}{n+1} \cdot m_n = \frac{m-n}{1} \cdot m_n = (m-n)_1 m_n$$

$$(n+2)_2 m_{n+2} = \frac{(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(m-n)(m-n-1)}{(n+1)(n+2)} \cdot m_n = (m-n)_2 m_n$$

u. s. w.

Die fragliche Reihe nimmt jetzt folgende Gestalt an:

$$[(m-n)_0 - (m-n)_1 + (m-n)_2 - \ldots]\, m_n$$

und die Summe der eingeklammerten Reihe ist Null für $m > n$, dagegen Eins für $m = n$. Diefs giebt zusammen folgenden bemerkenswerthen Satz: Die Summe der Reihe

(7) $$n_n m_n - (n+1)_n m_{n+1} + (n+2)_n m_{n+2} - \ldots$$

ist Null, wenn die ganzen positiven Zahlen m und n von einander verschieden, dagegen Eins, wenn sie gleich sind.

IV. Analog m_p bezeichnet $\left(\frac{m}{2}\right)_p$ den $p$ten Coefficienten, welcher zum Exponenten $\frac{m}{2}$ gehört. Derselbe ist

$$\frac{\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m}{2}-2\right)\left(\frac{m}{2}-3\right)\cdots\left(\frac{m}{2}-p+1\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,p}$$

Multiplizirt man Zähler und Nenner mit 2^p, so erhält man leicht

$$(8)\qquad \left(\frac{m}{2}\right)_p = \frac{m(m-2)(m-4)(m-6)\ldots(m-2p+2)}{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,(2p)}.$$

Von diesen Coeffizienten halber Exponenten gelten mehrere sehr merkwürdige Relationen, welche auf folgende Weise entstehen.

Sei μ eine ganz beliebige Gröfse, n eine positive ganze Zahl und folgende Reihe

$$(9)\qquad \mu_0\left(\frac{\mu}{2}\right)_n + \mu_2\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_{n-1} + \mu_4\left(\frac{\mu-4}{2}\right)_{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + \mu_{2n-2}\left(\frac{\mu-2n+2}{2}\right)_1 + \mu_{2n}\left(\frac{\mu-2n}{2}\right)_0 .$$

mit der Forderung gegeben, ihre Summe aufzufinden. Bezeichnet r eine positive ganze Zahl, so ist ein beliebig aus der Reihe herausgegriffenes Glied von der Form

$$(10)\qquad \mu_{2r}\left(\frac{\mu-2r}{2}\right)_{n-r}$$

und wir können uns die Reihe selbst dadurch entstanden denken, dafs man hier successive $r=0, 1, 2, 3, \ldots n$ setzt und alle hervorgehenden Gröfsen addirt. Entwickelt man den Werth jedes Faktors, so erhält man

$$\mu_{2r}\left(\frac{\mu-2r}{2}\right)_{n-r}$$
$$= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-2r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(2r)}\cdot\frac{(\mu-2r)(\mu-2r-2)\ldots(\mu-2n+2)}{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,(2n-2r)}$$

Im Zähler bilden hier diejenigen Faktoren, in welchen gerade Zahlen subtrahirt werden, nämlich

$$\mu,\ \mu-2,\ \mu-4,\ \ldots\ \mu-2r+2 \text{ und } \mu-2r,\ \mu-2r-4,\ \ldots$$
$$\mu-2n+2,$$

eine fortlaufende Reihe und wir können daher das Produkt in folgender Form schreiben:

$$\frac{\mu(\mu-2)\ldots(\mu-2n+2)}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2r-1)}\cdot\frac{(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2r+1)}{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,(2r)}\cdot\frac{1}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n-2r)}.$$

Setzt man noch im Zähler und Nenner die Faktorenreihe

$$(2r+1)(2r+3)\ldots(2n-3)(2n-1)$$

zu, wodurch sich der Werth des Bruches nicht ändert, so erhält man im Nenner des ersten Faktors die ununterbrochene Reihe der ungeraden Zahlen von 1 bis $2n+1$, mithin:

$$\mu_{2r}\left(\frac{\mu-2r}{2}\right)_{n-r} =$$

$$\frac{\mu(\mu-2)\dots(\mu-2n+2)}{1.3.5\dots(2n-1)}\cdot\frac{(\mu-1)(\mu-3)\dots(\mu-2r+1)}{2.4.6\dots(2r)}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2r+1)}{2.4.6\dots(2n-2r)}$$

Der erste dieser Faktoren ist von r unabhängig; wir setzen daher der Kürze wegen

$$(11)\qquad \frac{\mu(\mu-2)(\mu-4)\dots(\mu-2n+2)}{1.3.5\dots(2n-1)} = k$$

Der zweite Faktor ist nichts Anderes als der Binomialcoeffizient $\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_r$, wie man leicht durch Formel (8) prüft; schreibt man den dritten Faktor in der Form

$$\frac{(2n-1)(2n-1-2)\dots(2n-1-\overline{2n-2r}+2)}{2.4.6\dots(2n-2r)}$$

so erkennt man auch in ihm einen Binomialcoeffizienten, nämlich $\left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-r}$; es ist also

$$(12)\qquad \mu_{2r}\left(\frac{\mu-2r}{2}\right)_{n-r} = k\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_r\left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-r}$$

Setzt man hier successive $r=0, 1, 2, \dots n$ und addirt alle entspringenden Gleichungen, so folgt, dafs die Reihe (9) gleich ist der nachstehenden

$$k\Big[\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_0\left(\frac{2n-1}{2}\right)_n+\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_1\left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-1}+\dots$$
$$\dots+\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_n\left(\frac{2n-1}{2}\right)_0\Big]$$

Die eingeklammerte Reihe läfst sich aber nach Formel (6) des §. 38. summiren, wenn man dort $\alpha=\frac{2n-1}{2}$, $\beta=\frac{\mu-1}{2}$ setzt; ihre Summe ist $(\alpha+\beta)_n$ oder

$$\left(\frac{\mu+2n-2}{2}\right)_n = \frac{(\mu+2n-2)(\mu+2n-4)\dots(\mu+2)\mu}{2.4.6\dots(2n)}$$

Setzt man hierzu den Faktor k seinem Werthe aus (11) nach, so findet man, dafs die Reihe (9) gleich ist dem Ausdrucke

$$\frac{\mu(\mu-2)(\mu-4)\dots(\mu-\overline{2n-2})}{1.3.5\dots(2n-1)}\cdot\frac{\mu(\mu+2)(\mu+4)\dots(\mu+2n-2)}{2.4.6\dots(2n)}$$

woraus die Gleichung folgt

$$(13)\quad \mu_0\left(\frac{\mu}{2}\right)_n+\mu_2\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_{n-1}+\mu_4\left(\frac{\mu-4}{2}\right)_{n-2}+\dots$$
$$\dots+\mu_{2n-2}\left(\frac{\mu-2n+2}{2}\right)_1+\mu_{2n}\left(\frac{\mu-2n}{2}\right)_0$$
$$=\frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)\dots(\mu^2-\overline{2n-2}^2)}{1.2.3.4\dots(2n)},$$

V. Eine ganz ähnliche Transformation ist für die Summirung der Reihe

$$(14)\qquad \mu_1\binom{\frac{\mu-1}{2}}{n}+\mu_3\binom{\frac{\mu-3}{2}}{n-1}+\cdots$$
$$\cdots+\mu_{2n-1}\binom{\frac{\mu-2n+1}{2}}{1}+\mu_{2n+1}\binom{\frac{\mu-2n-1}{2}}{0}$$

nöthig. Ein allgemeines Glied derselben ist:

$$(15)\qquad \mu_{2r+1}\binom{\frac{\mu-2r-1}{2}}{n-r}$$
$$=\frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-2r)}{1.2.3\dots(2r+1)}\cdot\frac{(\mu-2r-1)(\mu-2r-3)\dots(\mu-2n+1)}{2.4.6\dots(2n-2r)}$$

Im Zähler bilden hier diejenigen Faktoren, in denen ungerade Zahlen abgezogen werden, nämlich

$$\mu-1,\ \mu-3,\ \dots\ \mu-2r+1$$

und $\qquad \mu-2r-1,\ \mu-2r-3,\ \dots\ \mu-2n+1$

eine ununterbrochene Reihenfolge; wir können daher die rechte Seite der Gleichung (15) in folgende Form bringen:

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-3)\dots(\mu-2n+1)}{1.3.5\dots(2r+1)}\cdot\frac{(\mu-2)(\mu-4)\dots(\mu-2r)}{2.4.6\dots(2r)}\cdot\frac{1}{2.4.6\dots(2n-2r)}$$

Setzt man noch im Zähler und Nenner die Faktorenreihe

$$(2r+3)\ (2r+5)\ \dots\ (2n-1)\ (2n+1)$$

zu, so ist der obige Ausdruck gleich dem folgenden

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-3)\dots(\mu-2n+1)}{1.3.5\dots(2n+1)}\cdot\frac{(\mu-2)(\mu-4)\dots(\mu-2r)}{2.4.6\dots(2r)}\cdot\frac{(2n+1)(2n-1)\dots(2r+3)}{2.4.6\dots(2n-2r)},$$

in welchem der erste Faktor von r unabhängig ist und mit k bezeichnet werden mag. Schreibt man die anderen beiden Faktoren in folgenden Formen:

$$\frac{(\mu-2)\ (\mu-2-2)\ \dots\ (\mu-2-2r+2)}{2.4.6\dots2r}$$

und

$$\frac{(2n+1)\ (2n+1-2)\ \dots\ (2n+1-\overline{2n-2r}+2)}{2.4.6\ \dots\ (2n-2r)}$$

so erkennt man in ihnen die Binomialcoeffizienten $\binom{\frac{\mu-2}{2}}{r}$ und $\binom{\frac{2n+1}{2}}{n-r}$; folglich ist

$$\mu_{2r+1}\binom{\frac{\mu-2r-1}{2}}{n-r}=k\binom{\frac{\mu-2}{2}}{r}\binom{\frac{2n+1}{2}}{n-r}$$

Setzt man successive $r=0,\ 1,\ 2,\ \dots\ n$ und addirt alle so entstehenden Glieder, so findet man, dafs die Reihe (14) gleich ist der folgenden

$$k\left[\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_0\left(\frac{2n+1}{2}\right)_n+\left(\frac{\mu'-2}{2}\right)_1\left(\frac{2n+1}{2}\right)_{n-1}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_n\left(\frac{2n+1}{2}\right)_0\right]=k\left(\frac{\mu-2+2n+1}{2}\right)_n$$

woraus man durch Entwickelung des zweiten Faktors und Substitution des Werthes von k findet:

$$(16)\quad \mu_1\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_n+\mu_3\left(\frac{\mu-3}{2}\right)_{n-1}+\cdots$$
$$\cdots+\mu_{2n-1}\left(\frac{\mu-2n+1}{2}\right)_1+\mu_{2n+1}\left(\frac{\mu-2n-1}{2}\right)_0$$
$$=\frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)\ldots(\mu^2-\overline{2n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots(2n+1)}$$

VI. Man bemerkt ebenso leicht, dafs

$$\mu_{2r}\left(\frac{\mu-2r-1}{2}\right)_{n-r}$$
$$=\frac{(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2n+1)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\left(\frac{\mu}{2}\right)_r\left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-r}$$

ist, und hieraus findet man, wenn $r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots n$ gesetzt und Alles addirt wird,

$$(17)\quad \mu_0\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_n+\mu_2\left(\frac{\mu-3}{2}\right)_{n-1}+\mu_4\left(\frac{\mu-5}{2}\right)_{n-2}+\cdots$$
$$\cdots+\mu_{2n}\left(\frac{\mu-2n-1}{2}\right)_0=\frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)\ldots(\mu^2-\overline{2n-1}^2)}{1.2.3\ldots(2n)}$$

VII. Aus der Gleichung

$$\mu_{2r+1}\left(\frac{\mu-2r-2}{2}\right)_{n-r}$$
$$=\frac{\mu(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-2n)}{1.3.5\ldots(2n+1)}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_r\left(\frac{2n+1}{2}\right)_{n-r}$$

ergiebt sich endlich noch für $r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots n$ und Addition aller entstehenden Glieder

$$(18)\quad \mu_1\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_n+\mu_3\left(\frac{\mu-4}{2}\right)_{n-1}+\mu_5\left(\frac{\mu-6}{2}\right)_{n-2}+\cdots$$
$$\cdots+\mu_{2n+1}\left(\frac{\mu-2n-2}{2}\right)_0=\frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)\ldots(\mu^2-\overline{2n}^2)}{1.2.3\ldots(2n+1)}$$

Von diesen vier letzten Gleichungen (15), (16), (17) und (18) werden wir später eine wichtige Anwendung machen.

Capitel IX.

Die Exponenzialreihe.

§. 41.

Ableitung derselben aus der Binomialreihe.

Den Lehren des §. 8. zufolge nähert sich der Ausdruck

$$\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega}$$

für unendlich wachsende ω der Gränze e^z, und es giebt demnach das vorliegende Theorem ein Mittel an die Hand, um von der Potenz $\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega}$ zu der Exponenzialgröfse e^z überzugehen; man gelangt zwar auf diesem Wege zunächst nur zu derjenigen Exponenzialgröfse, welche die besondere Zahl $e = 2,718..$ zur Basis hat, also zur natürlichen Exponenzialgröfse, aber es liegt hierin keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit; man kann nämlich jede andere Exponenzialgröfse a^x leicht auf die Form e^z bringen, indem man

$$a^x = (e^{la})^x = e^{x\,la}$$

setzt und mithin $x\,la$ an die Stelle von z treten läfst. Dieselben Operationen, welche den Übergang von der Potenz zur Exponenzialgröfse vermitteln, müssen sich nun auch auf die der Potenz gleichgeltende Binomialreihe anwenden lassen, und es ist unmittelbar klar, dafs man auf diesem Wege zu einer Reihe für die Exponenzialgröfse gelangen wird.

Bezeichnen wir $\frac{1}{\omega}$ mit δ, woraus $\omega = \frac{1}{\delta}$ folgt, so nimmt die Gleichung

$$Lim\left[\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega}\right] = e^z$$

die folgende Gestalt an

(1) $$Lim\left[(1+\delta z)^{\frac{1}{\delta}}\right] = e^z$$

worin sich das Zeichen Lim auf das Verschwinden von δ bezieht. Es ist aber vermöge des Binomialtheoremes

$$(1+\delta z)^{\frac{1}{\delta}}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{\delta}}{1}\delta z + \frac{\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{\delta}-1\right)}{1\,.\,2}\delta^2 z^2 + \frac{\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{\delta}-1\right)\left(\frac{1}{\delta}-2\right)}{1\,.\,2\,.\,3}\delta^3 z^3 + \ldots$$

oder nach Wegschaffung der Brüche

$$(2)\qquad (1+\delta z)^{\frac{1}{\delta}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1}z + \frac{1-\delta}{1\,.\,2}z^2 + \frac{(1-\delta)(1-2\delta)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3$$

$$+ \frac{(1-\delta)(1-2\delta)(1-3\delta)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}z^4 + \ldots$$

und diese Gleichung gilt für jedes δ, wenn die Bedingung $1 > \delta z > -1$ erfüllt ist, welcher man die bessere Form

$$(3)\qquad \frac{1}{\delta} > z > -\frac{1}{\delta}$$

geben kann. Lassen wir jetzt in der Gleichung (2) δ in Null übergehen und benutzen linker Hand die Formel (1), so folgt auf der Stelle

$$(4)\qquad e^z = 1 + \frac{1}{1}z + \frac{1}{1\,.\,2}z^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}z^3 + \ldots$$

Diefs ist die sogenannte Exponenzialreihe; sie gilt, wie aus No. (3) ersichtlich ist, für $\infty > z > -\infty$, d. h. für jedes beliebige endliche z.

Nimmt man speziell $z = 1$, so erhält man die Gleichung

$$(5)\qquad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

welche zur numerischen Berechnung von e dient; die Rechnung selbst ist sehr leicht, weil sich jedes Reihenglied aus dem vorhergehenden durch eine blofse Division ableiten läfst; man findet

$$e = 2{,}718281828459\ldots$$

Die Zahl selbst ist irrational und der Dezimalbruch kann defshalb keine Periode enthalten; man überzeugt sich hiervon durch folgende einfache Schlüsse. Die Summe der Reihe

$$(6)\qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \ldots$$

beträgt offenbar weniger als die der folgenden

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,2\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,2\,.\,2\,.\,2}$$

$$= \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

und sie ist daher ein **ächter** Bruch. Wäre nun

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4} + \ldots = \frac{p}{q}$$

wo $\frac{p}{q}$ einen **rationalen** ächten Bruch bezeichnet, dessen Zähler und Nenner rationale ganze positive Zahlen sind, so würde durch Multiplikation mit $2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,q$ folgen:

$$3.4.5\ldots q + 4.5.6\ldots q + 5.6\ldots q + \ldots + 1$$
$$+ \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots$$
$$= 2.3.4.5\ldots(q-1).p$$

Die erste Zeile linker Hand enthält nur Produkte von ganzen positiven Zahlen, die Summe derselben ist daher selbst eine solche Zahl, die M heifsen möge; die rechte Seite ist ebenfalls eine ganze positive Zahl, die wir mit N bezeichnen wollen. Demnach wäre

$$(7) \qquad M + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots = N$$

Die Summe der Reihe

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots$$

beträgt nun offenbar weniger als die Summe der folgenden

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots$$
$$= \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q}$$

und ist daher < 1, da q jedenfalls die Einheit übersteigt. Laut No. (7) müfste nun eine ganze positive Zahl M, mit einem ächten Bruche vereinigt, der ganzen positiven Zahl N gleich sein; dieser Widerspruch beweist, dafs die Summe der in (6) verzeichneten Reihe irrational und mithin nach No. (5) auch e eine Irrationalzahl sein mufs.

Nach dieser Digression über die Zahl e kehren wir zu der Gleichung (4) zurück, um aus ihr eine Reihe für a^x abzuleiten. Setzen wir nämlich

$$e^z = a^x$$

so folgt, wenn wir beiderseits die Logarithmen irgend eines Systemes nehmen,

$$z \log e = x \log a, \quad z = \frac{x \log a}{\log e}$$

mithin, wenn die für e^z und z angegebenen Werthe substituirt werden,

$$(8) \qquad a^x = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{x \log a}{\log e}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x \log a}{\log e}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x \log a}{\log e}\right)^3 + \ldots$$

Da uns die Wahl des logarithmischen Systemes noch völlig frei steht, so können wir ebensowohl e als a dafür nehmen; das Erste giebt

$$(9) \qquad a^x = 1 + \frac{x\, la}{1} + \frac{(x\, la)^2}{1.2} + \frac{(x\, la)^3}{1.2.3} + \ldots$$

das Zweite dagegen, wenn ${}^a\!\log$ für $\log$ gesetzt wird,

$$(10)\qquad a^x = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{x}{{}^a log\, e}\right) + \frac{1}{1\,.\,2}\left(\frac{x}{{}^a log\, e}\right)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{x}{{}^a log\, e}\right)^3 + \dots$$

Das letzte Resultat ist in so fern von Bedeutung, als es zu einem gegebenen Logarithmus die zugehörige Zahl finden lehrt; für $a^x = y$ folgt nämlich $x = {}^a log\, y$ und mithin

$$(11)\qquad y = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{{}^a log\, y}{{}^a log\, e}\right) + \frac{1}{1\,.\,2}\left(\frac{{}^a log\, y}{{}^a log\, e}\right)^2 + \dots$$

Man erkennt hier wiederum, dafs das natürliche Logarithmensystem das einfachste ist; denn für $a = e$ erhält die vorstehende Gleichung ihre einfachste Gestalt:

$$(12)\qquad y = 1 + \frac{1}{1}(ly) + \frac{1}{1\,.\,2}(ly)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}(ly)^3 + \dots$$

Unter den hier entwickelten Formeln ist die unter (4) verzeichnete die wichtigste, in so fern sie die Quelle aller übrigen bildet. Sehr häufig benutzt man sie mit den Substitutionen $z = kx$ und $z = -kx$, wo k einen constanten Faktor bezeichnet; es ist dann

$$(13)\qquad e^{kx} = 1 + \frac{kx}{1} + \frac{k^2x^2}{1\,.\,2} + \frac{k^3x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \dots$$

$$(14)\qquad e^{-kx} = 1 - \frac{kx}{1} + \frac{k^2x^2}{1\,.\,2} + \frac{k^3x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \dots$$

daraus folgen noch die beiden Formeln

$$(15)\qquad \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = 1 + \frac{k^2x^2}{1\,.\,2} + \frac{k^4x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{k^6x^2}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \dots$$

$$(16)\qquad \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2k} = \frac{x}{1} + \frac{k^2x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{k^4x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \dots$$

auf welche wir später zurückkommen werden.

§. 42.

Andere Ableitungen der Exponenzialreihe.

I. Setzt man in der Binomialformel

$$(1+z)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}z + \frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}z^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3 + \dots$$
$$1 > z > -1$$

$z = a^\delta - 1$ und $\mu = \frac{x}{\delta}$, so ergiebt sich nach Wegschaffung der Brüche

$$(1) \quad a^x = 1 + \frac{x}{1}\left(\frac{a^\delta - 1}{\delta}\right) + \frac{x(x-\delta)}{1.2}\left(\frac{a^\delta - 1}{\delta}\right)^2 + \frac{x(x-\delta)(x-2\delta)}{1.2.3}\left(\frac{a^\delta - 1}{\delta}\right)^3 + \ldots$$

und diefs gilt für $1 > a^\delta - 1 > -1$, eine Bedingung, die um so mehr erfüllt ist, je kleiner δ genommen wird; lassen wir δ in Null übergehen und setzen

$$Lim \frac{a^\delta - 1}{\delta} = A$$

so folgt jetzt aus (1) für jedes a und x

$$(2) \qquad a^x = 1 + \frac{x}{1}A + \frac{x^2}{1.2}A^2 + \frac{x^3}{1.2.3}A^3 + \ldots$$

Was nun die Gröfse A betrifft, so weifs man aus §. 8. Formel (15), dafs dieselbe $= la$ ist, und damit geht die Gleichung (2) unmittelbar in diejenige über, welche im vorigen Paragraphen unter No. (9) entwickelt wurde; man braucht aber diese Kenntnifs von A nicht vorauszusetzen, sondern kann sie sich mittelst der Gleichung (2) selbst verschaffen. Da nämlich letztere für alle x gilt, so ist es auch erlaubt, $x = \frac{1}{A}$ zu setzen und man hat dann

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots$$

folglich, wenn e die Summe der rechter Hand stehenden Reihe bezeichnet,

$$a^{\frac{1}{A}} = e$$

Nimmt man beiderseits die Logarithmen irgend eines beliebigen Systemes, so folgt

$$\frac{1}{A} \log a = \log e \quad \text{oder} \quad A = \frac{\log a}{\log e}$$

und durch diese Substitution wird die Gleichung (2) mit der unter No. (8) des vorigen Paragraphen entwickelten Formel identisch.

II. Eine ebenso kurze als elegante Ableitung der Formel für e^x erhält man durch unmittelbare Summirung der jederzeit convergenten Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Bezeichnen wir nämlich die unbekannte Summe derselben mit $f(x)$, so hat man

$$(3) \qquad f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots$$

und entsprechend

$$(4) \qquad f(y) = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\,.\,2} + \frac{y^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots$$

Die Multiplikation der beiden vorstehenden Gleichungen giebt:

$$\begin{aligned} f(x)\,.\,f(y) = 1& \\ &+ \frac{x}{1} + \frac{y}{1} \\ &+ \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x}{1}\,.\,\frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\,.\,2} \\ &+ \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\frac{y}{1} + \frac{x}{1}\,.\,\frac{y^2}{1\,.\,2} + \frac{y^3}{1\,.\,2\,.\,3} \\ &+ \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Bezeichnet man die einzelnen Horizontalreihen mit T_1, T_2, T_3 etc., so ist

$$(5) \qquad f(x)\,.\,f(y) = 1 + T_1 + T_2 + T_3 + \cdots$$

und hier bestimmt sich das allgemeine Glied T_n nach der Formel

$$T_n = \frac{x^n}{1\,.\,2 \ldots n} + \frac{x^{n-1}}{1\,.\,2 \ldots (n-1)}\,.\,\frac{y}{1} + \frac{x^{n-2}}{1\,.\,2 \ldots (n-2)}\,.\,\frac{y^2}{1\,.\,2} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{x}{1}\,.\,\frac{y^{n-1}}{1\,.\,2 \ldots (n-1)} + \frac{y^n}{1\,.\,2 \ldots n}$$

Dieser Gleichung kann man folgende Gestalt geben:

$$T_n = \frac{1}{1\,.\,2 \ldots n}\left[x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^{n-2}y^2 + \cdots + y^n\right]$$

d. i. nach dem Binomialtheoreme für ganze positive Exponenten:

$$T_n = \frac{1}{1\,.\,2 \ldots n}(x+y)^n$$

Die Formel (5) verwandelt sich jetzt in die nachstehende:

$$f(x)\,.\,f(y) = 1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{1\,.\,2} + \frac{(x+y)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots$$

d. i.

$$f(x)\,.\,f(y) = f(x+y)$$

Hieraus folgt aber nach §. 25.

$$f(x) = [f(1)]^x = \left[1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \cdots\right]^x$$

und man hat demnach

$$\left[1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\cdots\right]^x$$
$$=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\,.\,2}+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\cdots.$$

Diefs ist aber die Exponenzialreihe, wenn man die Summe der eingeklammerten Reihe mit e bezeichnet.

Capitel X.

Die logarithmischen Reihen.

§. 43.

Ableitung einer logarithmischen Reihe aus der Binomialreihe.

So wie wir in §. 41. die Exponenzialreihe aus der Binomialreihe mittelst der Formel

$$Lim\,\left[(1+\delta z)^{\frac{1}{\delta}}\right]=e^z$$

ableiteten, so können wir auf ähnliche Weise auch eine logarithmische Reihe gewinnen, indem wir uns an die Gleichung

(1) $$Lim\,\frac{a^\delta-1}{\delta}=la$$ [§. 8. No. (15)]

halten und auf die für a^δ geltende Reihe dieselben Operationen anwenden, welche hier mit a^δ selbst vorgenommen werden. Das Nächstliegende wäre nun, die Exponenzialreihe zu benutzen und in der Gleichung (8) §. 41. δ für x zu schreiben; es würde diefs aber, wie man leicht finden wird, zu dem trivialen Resultate $la=la$ führen. Wir benutzen daher nicht die Exponenzialreihe, sondern die Binomialreihe und setzen zu diesem Zwecke die zweitheilige Gröfse $1+x$ an die Stelle von a, so dafs die Gleichung (1) nunmehr lautet:

(2) $$Lim\,\frac{(1+x)^\delta-1}{\delta}=l(1+x)$$

Wenden wir hier auf $(1+x)^\delta$ das Binomialtheorem an, so ergiebt sich

(3) $$\frac{(1+x)^\delta-1}{\delta}$$
$$=\frac{1}{1}x+\frac{\delta-1}{1\,.\,2}x^2+\frac{(\delta-1)\,(\delta-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\frac{(\delta-1)\,(\delta-2)\,(\delta-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}x^4+\cdots$$

Die Reihe geht ins Unendliche, weil der Exponent δ ein kleiner Bruch ist, den wir nachher bis zur Gränze Null vermindern; sie gilt dem links

stehenden Ausdrucke so lange gleich, als x zwischen $+1$ und -1 enthalten ist. Lassen wir δ in Null übergehen und benutzen die Formel (2) für die linke Seite der Gleichung (3), so folgt jetzt

$$(4) \qquad l(1+x) = \frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$
$$1 > x > -1.$$

Für $x = +1$ convergirt die Reihe noch, daher besteht die Gleichung auch in diesem Falle und giebt

$$l2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Für $x = -1$ divergirt die Reihe rechter Hand und ihre Summe ist unendlich; in so fern nun das Resultat

$$l(0) = -\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots = -\infty$$

immer noch richtig ist, kann man sagen, dafs die Formel (4) so lange gilt, als x die Gränzen $+1$ und -1 nicht überschreitet.

Bevor wir die mannichfaltigen Folgerungen erörtern, die sich an die Gleichung (4) knüpfen, wollen wir erst eine zweite Ableitung derselben geben, die auf ganz anderen Grundsätzen beruht und sich zugleich durch ihre Kürze empfiehlt. Nach Formel (2) §. 15. ist

$$(5) \qquad l(1+x) = Q\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

und wenn man den Quotienten $1 : (1+x)$ in eine Reihe verwandelt, was für ein ächt gebrochenes x erlaubt ist,

$$(6) \qquad l(1+x) = Q(1 - x + x^2 - x^3 + \dots)$$
$$1 > x > -1.$$

Die rechter Hand postulirte Quadratur läfst sich dadurch ausführen, dafs man von jedem einzelnen Reihengliede die Quadratur bestimmt, was nach der Formel

$$Q(x^m) = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

leicht genug ist. Auf diese Weise ergiebt sich aus No. (6)

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$
$$1 > x > -1$$

was mit der Formel (4) übereinstimmt.

Lassen wir $-x$ an die Stelle von x treten, so giebt die Formel (4)

$$(7) \qquad l(1-x) = -\frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \dots$$
$$1 > x > -1$$

oder auch

$$(8) \qquad l\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots$$
$$1 > x > -1.$$

Da der Quotient $1 : (1-x)$ einen ächten Bruch zum Divisor hat, so beträgt er mehr als die Einheit; setzen wir daher

$$\frac{1}{1-x} = 1 + z, \quad \text{so folgt} \quad x = \frac{z}{z+1}$$

und hier kann nun z jede beliebige positive Zahl sein; die Formel (8) geht dann in die folgende über:

$$(9) \quad l(1+z) = \frac{1}{1}\left(\frac{z}{z+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z+1}\right)^3 + \dots$$

Rein theoretisch betrachtet, ist durch die Formeln (7) und (9) die Aufgabe, zu einer gegebenen Zahl den natürlichen Logarithmus zu finden, vollständig gelöst; für alle Zahlen unter 1 dient nämlich die Formel (7), für alle Zahlen über 1 die Formel (9). Logarithmen negativer Zahlen giebt es bekanntlich nicht und mithin erschöpfen die obigen Beziehungen schon alle Fälle. Für die praktische Berechnung sind dieselben weniger brauchbar wegen der meistentheils geringen Convergenz der vorkommenden Reihen, und wir geben daher noch einige Entwickelungen, welche zur wirklichen Berechnung von Logarithmen dienen können.

§. 44.

Reihen zur Berechnung von Logarithmen.

Zieht man die siebente Formel von der vierten ab, so ergiebt sich

$$(1) \qquad l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[\frac{1}{1}x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots\right]$$
$$1 > x > -1$$

und für

$$\frac{1+x}{1-x} = z, \quad \text{also} \quad x = \frac{z-1}{z+1}$$

geht die ebenentwickelte Formel in die nachstehende über:

$$(2) \quad lz = 2\left[\frac{1}{1}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \dots\right]$$

welche für jedes positive z Gültigkeit besitzt. Sie ist von Vortheil für kleine z, z. B. $z = 2$, wo man erhält

$$l2 = 2\left[\frac{1}{1 \cdot 3^1} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots\right]$$

Kennt man den Logarithmus einer Zahl a, so findet sich der Logarithmus von $a + b$, wenn $b < a$, durch die Bemerkung, dafs $a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$

und mithin $l(a+b) = la + l\left(1+\frac{b}{a}\right)$ ist. Da nämlich der Voraussetzung nach der Quotient $\frac{b}{a}$ unter der Einheit liegt, so giebt die Anwendung von No. (4)

$$(3) \qquad l(a+b) = la + \frac{1}{1}\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \dots$$
$$a > b$$

Eine brauchbarere Formel liefert die identische Gleichung

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{1 + \frac{b}{2a+b}}{1 - \frac{b}{2a+b}}$$

indem man den Logarithmus von $1 + \frac{b}{a}$ nunmehr mittelst der Formel (1) dieses Paragraphen für $x = b : (2a+b)$ entwickeln kann; diefs giebt

$$(4) \quad l(a+b) = la + 2\left[\frac{1}{1}\left(\frac{b}{2a+b}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^5 + \dots\right]$$

und zwar gilt diese Formel für alle positiven a und b, weil dann $b : (2a+b)$ jederzeit ein ächter Bruch wird. Für $a = 2$, $b = 1$ hätte man z. B.

$$l3 = l2 + 2\left[\frac{1}{1}\left(\frac{2}{10}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{10}\right)^5 + \dots\right]$$

was sich sehr leicht rechnet.

Nimmt man in der Formel (8) $x = \frac{1}{p^2}$, so wird für $p > 1$

$$l\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right) = \frac{1}{1}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^4} + \frac{1}{3}\frac{1}{p^6} + \dots$$

die linke Seite ist hier

$$= l(p^2) - l(p^2-1)$$
$$= 2l(p) - [l(p-1) + l(p+1)]$$

und durch Substitution hiervon findet man leicht

$$(5) \qquad lp = \frac{l(p-1) + l(p+1)}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{p^4} + \frac{1}{6}\frac{1}{p^6} + \dots$$

Diese Formel lehrt den Logarithmus einer Zahl p finden, wenn die Logarithmen der beiden benachbarten Zahlen $p-1$ und $p+1$ schon bekannt sind. Nun braucht man aber nur die Logarithmen der Primzahlen zu berechnen, in diesem Falle sind $p-1$ und $p+1$ gerade, d. h. zusammen-

gesetzte Zahlen, und folglich ihre Logarithmen aus den schon berechneten Logarithmen bekannt. Für $p = 5$ z. B. wäre $l4 = 2l2$, $l6 = l2 + l3$, mithin

$$l5 = \frac{3l2 + l3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{100}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{100}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{4}{100}\right)^3 + \cdots$$

und hier kennt man $l2$ und $l3$ nach dem Vorigen. Zugleich ersieht man leicht, dafs die Rechnung nach der Formel (5) um so leichter wird, je gröfser die Zahl p ist, und dafs es mithin nur einer Tabelle der Primzahlen bedarf, um die Logarithmen sehr grofser Zahlen mit bedeutender Genauigkeit zu berechnen.

Die bisherigen Formeln gelten nur für natürliche Logarithmen, und es wäre daher noch die Frage, wie sich die künstlichen Logarithmen irgend eines Systemes, etwa der Basis b, berechnen liefsen. Diefs ist aber sehr leicht, sobald erst die Tafel der natürlichen Logarithmen vorliegt; man hat nämlich für jede Zahl z

$$z = e^{lz} \quad \text{und auch} \quad z = b^{({}^b\log z)}$$

mithin, wenn man von beiden rechten Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt:

$$lz \,.\, le = {}^b\log z \,.\, lb$$

oder umgekehrt und weil $le = 1$,

$${}^b\log z = \frac{1}{lb} \,.\, lz$$

Um also die künstlichen Logarithmen der Basis b zu finden, hat man die natürlichen Logarithmen nur mit dem Faktor $\frac{1}{lb}$ zu multipliziren; man nennt denselben den Modulus des Systemes der Basis b und bezeichnet:

$$\frac{1}{lb} = M_b$$

Für das Brigg'sche System ist $b = 10$ und man findet leicht wegen $l10 = l(3^2 + 1)$

$$l10 = 2{,}30258509\ldots, \quad M_{10} = \frac{1}{l10} = 0{,}434294482\ldots$$

Um also natürliche Logarithmen in Brigg'sche zu verwandeln, mufs man erstere mit 0,434 .. multipliziren; umgekehrt kann man auch die natürlichen Logarithmen aus den Brigg'schen ableiten, wenn man letztere mit dem Modulus dividirt, d. h. mit 2,302 .. multiplizirt.

Capitel XI.
Die goniometrischen Reihen.

§. 45.
Die Reihen für den Sinus und Cosinus.

Überblicken wir die Formeln der drei vorhergehenden Capitel, so enthalten sie das Gesammtresultat, dafs sich die drei Funktionen Potenz, Exponenzialgröfse und Logarithmus in Reihen verwandeln lassen, die nach Potenzen einer veränderlichen Gröfse, x oder $\frac{x}{1+x}$ u. dergl., fortschreiten; es wäre daher zu versuchen, ob nicht etwas Ähnliches auch für die goniometrischen und cyklometrischen Funktionen geleistet werden könnte. Die Bedeutung, welche die Lösung dieser Aufgabe hätte, ist leicht einzusehen; so wie nämlich durch die Formeln der Capp. IX. u. X. die Probleme gelöst wurden, zu einer gegebenen Zahl den Logarithmus und umgekehrt die einem bestimmten Logarithmus entsprechende Zahl zu finden, so würde die Auflösung unseres neuen Problemes ein Mittel bieten, um zu einer als Bogen gedachten Zahl den Sinus, Cosinus u. s. w. oder umgekehrt zu einer gegebenen goniometrischen Funktion den zugehörigen Bogen zu bestimmen.

Was nun den Sinus und Cosinus anbelangt, so sind es die beiden Gleichungen

(1) $$Q(\cos x) = \sin x \quad \text{und} \quad Q(\sin x) = 1 - \cos x$$

welche von besonderem Vortheil werden, wenn man sie mit der Formel

(2) $$Q(x^m) = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

und mit dem Theoreme:

(3) $$\text{für } \varphi(x) \gtrless \psi(x) \text{ ist } Q\varphi(x) \gtrless Q\psi(x)$$

in Verbindung bringt. Aus der Ungleichung

(4) $$\cos x < 1 \quad \text{oder} \quad \cos x < x^0$$

welche für jeden Bogen gilt, der nicht = Null oder gleich einem geraden Vielfachen von π ist, folgt nämlich, indem man die beiderseitige Quadratur vornimmt, nach (1), (3) und (2)

(5) $$\sin x < \frac{x}{1}$$

wie man auch sonst schon weifs. Die Quadratur hiervon giebt

$$1 - \cos x < \frac{x^2}{1 \cdot 2}$$

oder bei Transposition von $cos\,x$ und umgekehrter Anordnung

(6) $$cos\,x > 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2}$$

Die Quadratur hiervon ist:

(7) $$sin\,x > \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}$$

Wiederholt man das Verfahren, so ergiebt sich

$$1 - cos\,x > \frac{x^2}{1\,.\,2} - \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

oder umgekehrt geschrieben:

(8) $$cos\,x < 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

und hieraus folgt wieder durch Quadratur

(9) $$sin\,x < \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$$

Man übersieht auf der Stelle, wie sich dieses sehr einfache Verfahren der successiven Quadratur fortsetzen läfst; ordnet man die entstehenden Ungleichungen so, dafs alle diejenigen Beziehungen aufeinander folgen, welche für den Cosinus und ebenso die, welche für den Sinus gelten, so erhält man folgende Zusammenstellung:

$$cos\,x < 1$$

$$cos\,x > 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2}$$

$$cos\,x < 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

$$cos\,x > 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{x^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}$$

u. s. w.

$$sin\,x < x$$

$$sin\,x > \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$sin\,x < \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$$

$$sin\,x > \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \frac{x^7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}$$

u. s. w.

Es hat keine Schwierigkeit, die allgemeinen Ungleichungen aufzustellen, von welchen die vorigen Beziehungen die speziellen Fälle sind; man braucht nur zu bemerken, dafs in den Cosinusformeln das Zeichen $<$ oder $>$ steht, je nachdem das letzte Glied rechter Hand positiv oder negativ ausfällt; das Erste findet statt, wenn der Exponent des x in diesem

Gliede von der Form $4n$, das Zweite, wenn er von der Form $4n+2$ ist, wo n immer eine ganze positive Zahl bezeichnet. Man hat daher

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots + \frac{x^{4n}}{1\,.\,2\ldots(4n)}$$

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots + \frac{x^{4n}}{1\,.\,2\ldots(4n)} - \frac{x^{4n+2}}{1\,.\,2\ldots(4n+2)}$$

und ebenso leicht findet man aus den für den Sinus geltenden Beziehungen:

$$\sin x < \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + \frac{x^{4n+1}}{1\,.\,2\ldots(4n+1)}$$

$$\sin x > \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + \frac{x^{4n+1}}{1\,.\,2\ldots(4n+1)} - \frac{x^{4n+3}}{1\,.\,2\ldots(4n+3)}$$

Aus diesen vier Ungleichungen lassen sich zwei Gleichungen bilden, indem man die Bemerkung hinzubringt, dafs eine zwischen B und A liegende Zahl M ($M < A$ und $M > B$) gleich der gröfseren, vermindert um einen Bruchtheil des Unterschiedes $A - B$, sein mufs; bezeichnen wir also mit ϱ einen positiven ächten Bruch, dessen genauer Betrag nicht weiter bekannt ist, so folgt aus den beiden Ungleichungen:

$$M < A \quad \text{und} \quad M > B$$

die Gleichung

$$M = A - \varrho(A - B)$$

Indem wir diesen Satz auf die obigen Ungleichungen anwenden, ergeben sich die Gleichungen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots + \frac{x^{4n}}{1\,.\,2\ldots(4n)} - \frac{\varrho x^{4n+2}}{1\,.\,2\ldots(4n+2)}$$

und

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x^{4n+1}}{1\,.\,2\ldots(4n+1)} - \frac{\varrho x^{4n+3}}{1\,.\,2\ldots(4n+3)}$$

oder wenn wir das jedesmalige letzte Glied auf die linke Seite transponiren:

(10)
$$\cos x + \varrho \frac{x^{4n+2}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(4n+2)}$$
$$= 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots + \frac{x^{4n}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(4n)}$$

und

$$(11)\qquad \sin x + \varrho\frac{x^{4n+3}}{1.2.3\ldots(4n+3)}$$
$$=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots+\frac{x^{4n+1}}{1.2.3\ldots(4n+1)}$$

Es liegt nun der Gedanke nicht fern, die noch willkührliche ganze Zahl n unausgesetzt wachsen zu lassen, wodurch die rechter Hand befindlichen endlichen, $2n+1$ Glieder enthaltenden Reihen, zu unendlichen Reihen werden. Hierbei entsteht die Frage, welchen Gränzen sich die Ausdrücke

$$(12)\qquad \varrho\frac{x^{4n+2}}{1.2.3\ldots(4n+2)} \quad\text{und}\quad \varrho\frac{x^{4n+3}}{1.2.3\ldots(4n+3)}$$

für unendlich wachsende n nähern.

Betrachten wir zunächst den Ausdruck

$$\frac{x^m}{1.2.3\ldots m}$$

und nennen wir ξ den absoluten Werth von x, so ist entweder $x=+\xi$ oder $x=-\xi$ und demnach

$$(13)\qquad \frac{x^m}{1.2.3\ldots m}=\pm\frac{\xi^m}{1.2.3\ldots m}$$

Dieses ξ ist entweder selbst eine ganze Zahl k oder zwischen zwei ganzen Zahlen k und $k+1$ enthalten, man hat daher auf alle Fälle

$$k+1>\xi\geqq k$$

Nehmen wir das willkührliche $m>k$, so ist identisch

$$\frac{\xi^m}{1.2.3\ldots m}=\frac{\xi^k}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{\xi^{m-k}}{(k+1)\,(k+2)\ldots(k+m-k)}$$
$$=\frac{\xi^k}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{\xi}{k+1}\cdot\frac{\xi}{k+2}\cdot\frac{\xi}{k+3}\cdots\frac{\xi}{k+m-k}$$

Der erste Faktor $\xi^k:(1.2\ldots k)$ ändert sich nicht, wie auch m wachsen möge, er bildet also eine Constante, die wir kurz K nennen wollen; die übrigen Faktoren $\frac{\xi}{k+1}$, $\frac{\xi}{k+2}$ etc. sind ächte Brüche (wegen $k+1>\xi$), und zwar ist der erste Faktor der gröfste; setzen wir ihn, der kurz β heifsen möge, an die Stelle aller folgenden Faktoren, so ist

$$0<\frac{\xi^m}{1.2\ldots m}<K.\beta^{m-k}$$

und mithin für unendlich wachsende m

$$Lim\frac{\xi^m}{1.2\ldots m}=K.0=0$$

woraus nach No. (13) weiter folgt, dafs für jedes endliche bestimmte x

$$Lim\frac{x^m}{1.2.3\ldots m}=0$$

sein mufs. Die in (12) verzeichneten Ausdrücke haben nun gleichfalls die Null zur Gränze, weil der Faktor ϱ immer kleiner als die Einheit bleibt, wie er sich auch sonst bei wachsenden n ändern möge. Nach diesen Erörterungen gehen die Gleichungen (10) und (11) bei unendlich werdenden n in die folgenden über:

$$(14)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots$$

$$(15)\quad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots$$

und lösen die Aufgabe, zu einem beliebigen Bogen x den Cosinus und Sinus zu finden.

§. 46.

Die Reihen für die Sekante und Tangente.

I. Um die Sekante in eine unendliche Reihe zu verwandeln, bemerken wir zunächst, dafs zufolge der Definition der Sekante die Gleichung

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - (1 - \cos x)}$$

statt findet, aus welcher man sogleich eine nach Potenzen von $1 - \cos x$ fortschreitende Reihe erhalten kann, wenn man die Formel

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \ldots$$

$$1 > u > -1$$

für $u = 1 - \cos x$ in Anspruch nimmt. Damit aber u ein ächter Bruch bleibe, mufs $\cos x$ positiv sein, und wir dürfen daher x über die Gränzen $+\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$ nicht hinausgehen lassen; somit ist nun

$$(1)\quad \sec x = 1 + (1 - \cos x) + (1 - \cos x)^2 + (1 - \cos x)^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$$

Setzen wir statt $\cos x$ die vorhin gefundene Reihe, so wird

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{3 \cdot 4} + \frac{x^4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \ldots\right)$$

und mithin

$$\begin{aligned}\sec x = 1 &+ \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{3 \cdot 4} + \frac{x^4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \ldots\right)\\ &+ \frac{x^4}{4}\left(1 - \frac{x^2}{3 \cdot 4} + \ldots\ldots\ldots\right)^2\\ &+ \frac{x^6}{8}\left(1 - \ldots\ldots\ldots\ldots\right)^3\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Durch Ausführung der hier angedeuteten Potenzirungen und durch nachherige Vereinigung aller derjenigen Glieder, welche gleiche Potenzen von x enthalten, findet sich

$$sec\, x = 1 + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{5x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{61x^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \ldots$$

$$\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$$

Hier ist nun zwar die äufsere Form der Reihe leicht zu erkennen, sie würde nämlich sein

$$(2) \quad sec\, x = T_0 + \frac{T_2 x^2}{1\,.\,2} + \frac{T_4 x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{T_6 x^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \ldots$$

aber das Gesetz, nach welchem sich die Coeffizienten

$$(3) \quad T_0 = 1,\ T_2 = 1,\ T_4 = 5,\ T_6 = 61,\ \ldots.$$

bilden, bedarf einer besonderen Untersuchung, da es aus der obigen Ableitung der Sekantenreihe nicht erkennbar ist.

Um dieses Bildungsgesetz aufzufinden, hat man nur die einfache Bemerkung nöthig, dafs $sec\, x\ .\ cos\, x = 1$ ist, dafs mithin auch die Sekantenreihe mit der Cosinusreihe multiplizirt die Einheit als Produkt geben mufs; wenn man demgemäfs in der Gleichung

$$1 = \left(T_0 + \frac{T_2 x^2}{1\,.\,2} + \frac{T_4 x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{T_6 x^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \ldots\right)$$
$$\times \left(1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{x^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \ldots\right)$$

die angedeutete Multiplikation ausführt, so entsteht die Gleichung

$$\begin{aligned} 1 = {} & T_0 \\ & + \left(\frac{T_2}{1\,.\,2} - \frac{T_0}{1\,.\,2}\right) x^2 \\ & + \left(\frac{T_4}{1\,.\,.\,4} - \frac{T_2}{1\,.\,2}\,.\,\frac{1}{1\,.\,2} + \frac{T_0}{1\,.\,2\,.\,.\,4}\right) x^4 \\ & + \left(\frac{T_6}{1\,.\,.\,6} - \frac{T_4}{1\,.\,.\,4}\,.\,\frac{1}{1\,.\,2} + \frac{T_2}{1\,.\,2}\,.\,\frac{1}{1\,.\,.\,4} - \frac{T_0}{1\,.\,.\,6}\right) x^6 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und aus ihr folgt, dafs erstlich $T_0 = 1$ und zweitens der Coeffizient von jeder der Potenzen x^2, x^4, x^6 etc. der Null gleich sein mufs. Bezeichnen wir überhaupt mit m eine beliebige von Null verschiedene gerade Zahl und setzen den Coeffizienten von x^m der Null gleich, so giebt diefs die Gleichung

$$\frac{T_m}{1\,.\,2\ldots m} - \frac{T_{m-2}}{1\ldots(m-2)}\,.\,\frac{1}{1\,.\,2} + \frac{T_{m-4}}{1\ldots(m-4)}\,.\,\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$
$$- \frac{T_{m-6}}{1\ldots(m-6)}\,.\,\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \ldots. = 0$$

oder durch Multiplikation mit $1 . 2 . 3 \ldots m$,

$$T_m - \frac{m(m-1)}{1 . 2} T_{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 . 2 . 3 . 4} T_{m-4}$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6} T_{m-6} + \ldots = 0$$

Wenden wir die Bezeichnung der Binomialcoeffizienten hier an und schreiben $\sin \frac{m\pi}{2}$ für Null, was wegen des geraden m immer richtig ist, so haben wir folgende elegante Beziehung zwischen den Coeffizienten T_m, T_{m-2} etc.

(4) $$m_0 T_m - m_2 T_{m-2} + m_4 T_{m-4} - m_6 T_{m-6} + \ldots$$
$$= \sin \frac{m\pi}{2}$$

Aus ihr lassen sich, da $T_0 = 1$ bekannt ist, alle übrigen Coeffizienten T_2, T_4, T_6 etc. leicht ableiten, indem man der Reihe nach $m = 2, 4, 6, \ldots$ setzt. So erhält man

$$T_2 - T_0 = 0, \quad \text{mithin} \quad T_2 = T_0 = 1$$
$$T_4 - 6T_2 + T_0 = 0, \quad \text{-} \quad T_4 = 6T_2 - T_0 = 5$$

u. s. w.

Durch die Formeln (2) und (4) ist nun das Problem der Aufstellung einer Reihe für die Sekante in soweit gelöst, als es die bisherigen *Mittel* gestatten.

II. Aus der Sekantenreihe läfst sich leicht die Tangentenreihe mittelst der Bemerkung ableiten, dafs

$$\tan x = \sec x \,.\, \sin x$$

ist und dafs mithin, wenn für $\sec x$ und $\sin x$ die gleichgeltenden Reihen gesetzt werden, auch die Gleichung

$$\tan x = \left(1 + \frac{x^2}{1 . 2} + \frac{5x^4}{1 . 2 . 3 . 4} + \frac{61x^6}{1 . 2 \ldots 6} + \ldots\right)$$
$$\times \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 . 2 . 3} + \frac{x^5}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} - \ldots\ldots\ldots\right)$$
$$= \frac{x}{1} + \frac{2x^3}{1 . 2 . 3} + \frac{16x^5}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

bestehen mufs, jedoch nur so lange, als der erste Faktor rechter Hand der Sekante gleich ist, also nur für $\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$. Stellen wir nun die Tangentenreihe in der Form dar

(5) $$\tan x = \frac{T_1 x}{1} + \frac{T_3 x^3}{1 . 2 . 3} + \frac{T_5 x^5}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} + \ldots$$
$$\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$$

wo

(6) $$T_1 = 1, \quad T_3 = 2, \quad T_5 = 16, \ \ldots$$

so würde es hier darauf ankommen, das Bildungsgesetz der Coeffizienten T_1, T_3, T_5 etc. aufzufinden. Diese Aufgabe gestattet eine ganz ähnliche Lösung wie die vorige der Bestimmung von T_2, T_4, T_6 etc.; wegen $\tan x \,.\, \cos x = \sin x$ mufs nämlich bei Substitution der gleichgeltenden Reihen sein:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7} + \ldots$$
$$= \left(\frac{T_1 x}{1} + \frac{T_3 x^3}{1.2.3} + \frac{T_5 x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right)$$
$$\times \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \ldots\right)$$

Führt man die Multiplikation aus und vergleicht dann die beiderseitigen Coeffizienten von x^m, wo m eine beliebige ungerade Zahl bezeichnet, so findet man ohne Mühe

$$\frac{T_m}{1.2\ldots m} - \frac{T_{m-2}}{1.2\ldots(m-2)} \cdot \frac{1}{1.2} + \frac{T_{m-4}}{1\ldots(m-4)} \cdot \frac{1}{1.2.3.4}$$
$$- \frac{T_{m-6}}{1.2\ldots(m-6)} \cdot \frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{1.2.3\ldots m}$$

und durch Multiplikation mit $1.2.3\ldots m$

$$T_m - \frac{m(m-1)}{1.2} T_{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} T_{m-4}$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4.5.6} T_{m-6} + \ldots$$
$$= (-1)^{\frac{m-1}{2}} = \sin\frac{m\pi}{2}$$

oder endlich, indem man die Binomialcoeffizientenbezeichnung in Gebrauch nimmt,

(7) $$m_0 T_m - m_2 T_{m-2} + m_4 T_{m-4} - m_6 T_{m-6} + \ldots$$
$$= \sin\frac{m\pi}{2}$$

Für $m = 1, 3, 5, \ldots$ erhält man aus dieser Beziehung der Reihe nach die Werthe von T_1, T_3, T_5 etc., und hat nun in den Formeln (5) und (7) eine vollständige Auflösung des Problemes der Aufstellung einer Reihe für die Tangente.

Vergleicht man die Relationen (4) und (7), so erkennt man auf der Stelle, dafs sie sich formell nicht, sondern nur darin unterscheiden, dafs

m in No. (4) eine gerade und in No. (7) eine ungerade Zahl bedeutet. Nimmt man daher in der Gleichung

$$m_0 T_m - m_2 T_{m-2} + m_4 T_{m-4} - m_6 T_{m-6} + \dots$$
$$= \sin \frac{m\pi}{2}$$

m der Reihe nach $= 1, 2, 3, 4, \dots$, so ergeben sich die Zahlen T_1, T_2, T_3, T_4, ..., und von diesen sind die geradstelligen Zahlen die Sekantencoeffizienten, die ungeradstelligen die Tangentencoeffizienten.

Durch Addition der Sekanten- und Tangentenreihe ergiebt sich noch ein bemerkenswerthes Resultat; es ist nämlich

$$\sec x + \tan x$$
$$= \frac{1 + \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)} = \frac{2\cos^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)}$$
$$= \cot\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) = \tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right)$$

und mithin aus No. (2) und No. (5)

(8) $$\tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right)$$
$$= T_0 + \frac{T_1 x}{1} + \frac{T_2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{T_3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{T_4 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$
$$\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$$

wo nun die Reihe sämmtliche Sekanten- und Tangentencoeffizienten enthält.

§. 47.

Die Reihen für die Cosekante und Cotangente.

I. Auf ganz ähnliche Weise, wie wir im vorigen Paragraphen die Sekantenreihe aus der Cosinusreihe abgeleitet haben, läfst sich auch die Cosekante mittelst der Sinusformel in eine Reihe verwandeln. Zufolge der Definition von $\operatorname{cosec} x$ ist

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

oder, wenn statt $\sin x$ die gleichgeltende Reihe substituirt wird,

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots}$$

und hieraus erkennt man ohne Mühe, dafs die Cosekantenreihe mit dem Gliede $\frac{1}{x}$ anfangen mufs; aus diesem Grunde gehen wir darauf aus, nicht

cosec x selber, sondern das Produkt $x \operatorname{cosec} x$ in eine Reihe zu verwandeln, deren erstes Glied nunmehr die Einheit sein wird. Aus der identischen Gleichung

$$x \operatorname{cosec} x = \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)}$$

folgt zunächst

$$(1) \quad x \operatorname{cosec} x = 1 + \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) + \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^3 + \dots$$

was jedoch voraussetzt, dafs $1 - \frac{\sin x}{x}$ weniger als die Einheit betrage und mithin $\frac{\sin x}{x}$ ein positiver ächter Bruch sei. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn x zwischen $+\pi$ und $-\pi$ liegt, und wir haben daher der Gleichung (1) noch die Determination

$$\pi > x > -\pi$$

beizufügen. Vermöge der für $\sin x$ geltenden Reihe geht nun die Gleichung (1) in die folgende über:

$$x \operatorname{cosec} x = 1 + \frac{x^2}{2 \cdot 3}\left(1 - \frac{x^2}{4 \cdot 5} + \frac{x^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \dots\right)$$
$$+ \frac{x^4}{4 \cdot 9}\left(1 - \frac{x^2}{4 \cdot 5} + \dots\dots\dots\right)^2$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

oder durch Ausführung der Potenzirungen und durch Vereinigung der gleichartigen Glieder

$$x \operatorname{cosec} x = 1 + \frac{\frac{1}{6} x^2}{1 \cdot 2} + \frac{\frac{7}{15} x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$
$$\pi > x > -\pi$$

und mithin durch Division mit x

$$(2) \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{6} x}{1 \cdot 2} + \frac{\frac{7}{15} x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$
$$\pi > x > -\pi$$

Hieraus geht hervor, dafs man setzen darf

$$(3) \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{U_1 x}{1 \cdot 2} + \frac{U_3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$
$$\pi > x > -\pi$$

worin U_1, U_3, U_5, ... gewisse Coeffizienten bezeichnen, deren Bildungsgesetz noch zu entwickeln ist. Diese Aufgabe liefse sich einfach dadurch lösen, dafs man die Gleichung (3) mit der folgenden

$$sin\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

multiplizirte und die Coeffizienten von x^2, x^4, x^6 etc. gleich Null setzte, da linker Hand diese Potenzen von x nicht vorkommen; man kann aber auf eine zweite kürzere Weise zur Kenntnifs der Zahlen U_1, U_3, U_5 etc. gelangen, und wir werden dieselbe auseinandersetzen, nachdem wir vorerst die Form der Cotangentenreihe entwickelt haben:

Multiplizirt man die Gleichung (3) mit der folgenden

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\dots 6} + \dots,$$

so erhält man nach leichter Reduktion

$$(4) \qquad cot\, x = \frac{1}{x} - \frac{\frac{2}{3}x}{1.2} - \frac{\frac{8}{15}x^3}{1.2.3.4} - \dots$$

und zwar gilt diese Gleichung wie die in No. (3) verzeichnete nur für

$$\pi > x > -\pi.$$

Man darf daher, gemäfs der Formel (4), setzen

$$(5) \qquad cot\, x = \frac{1}{x} - \frac{V_1 x}{1.2} - \frac{V_3 x^3}{1.2.3.4} - \dots$$

$$\pi > x > -\pi$$

wo es sich nun noch um die Bestimmung der Zahlen V_1, V_3, V_5 etc. handelt.

II. Was die in den Gleichungen (3) und (5) vorkommenden Coeffizienten U und V anbelangt, so lassen sich dieselben leicht auf die aus dem vorigen Paragraphen bekannten Tangentencoeffizienten zurückführen. Nach einer bekannten goniometrischen Formel ist nämlich

$$cot\, z - 2\, cot\, 2z = tan\, z$$

und wenn man jetzt für $cot\, z$, $cot\, 2z$ und $tan\, z$ die gleichgeltenden Reihen setzt, was unter der Bedingung $\pi > 2z > -\pi$ oder $\frac{1}{2}\pi > z > -\frac{1}{2}\pi$ erlaubt ist, so ergiebt sich auf der Stelle

$$\begin{aligned} &- \frac{V_1 z}{1.2} - \frac{V_3 z^3}{1.2.3.4} - \frac{V_5 z^5}{1.2.3.4.5.6} - \dots \\ &+ \frac{2^2 V_1 z}{1.2} + \frac{2^4 V_3 z^3}{1.2.3.4} + \frac{2^6 V_5 z^5}{1.2.3.4.5.6} + \dots \\ &= \frac{T_1 z}{1} + \frac{T_3 z^3}{1.2.3} + \frac{T_5 z^5}{1.2.3.4.5} + \dots \end{aligned}$$

und mithin durch Vergleichung der Coeffizienten von z^{2n-1}

$$-\frac{V_{2n-1}}{2n} + \frac{2^{2n} V_{2n-1}}{2n} = T_{2n-1}$$

und mithin bestimmt sich V_{2n-1} nach der Formel

(6) $$V_{2n-1} = \frac{2n}{2^{2n}-1} T_{2n-1}$$

Man hat ferner den goniometrischen Satz:

$$2 \cosec 2z - \cot z = \tan z$$

und mithin ist durch Substitution der gleichgeltenden Reihen

$$\frac{2^2 U_1 z}{1 \cdot 2} + \frac{2^4 U_3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2^6 U_5 z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$
$$+ \frac{V_1 z}{1 \cdot 2} + \frac{V_3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{V_5 z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$
$$= \frac{T_1 z}{1} + \frac{T_3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{T_5 z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

Die Vergleichung der Coeffizienten von z^{2n-1} giebt

$$\frac{2^{2n} U_{2n-1}}{2n} + \frac{V_{2n-1}}{2n} = T_{2n-1}$$

Substituirt man den Werth von V_{2n-1} aus No. (6) und drückt nachher U_{2n-1} durch T_{2n-1} aus, so findet sich ohne Schwierigkeit

(7) $$U_{2n-1} = \frac{2n}{2^{2n}} \cdot \frac{2^{2n}-2}{2^{2n}-1} T_{2n-1}$$

Mittelst der Formeln (6) und (7) sind nun die Coeffizienten U_1, U_3 etc. und V_1, V_3 etc. auf die Tangentencoeffizienten zurückgeführt und können demnach aus den letzteren berechnet werden.

Capitel XII.

Die cyklometrischen Reihen.

§. 48.

Die Arcussinus-Reihe.

Um eine Reihe zu entwickeln, welche den einem gegebenen Sinus entsprechenden Bogen finden lehrt, bedarf es nur eines Rückblicks auf die in §. 17. unter No. (4) gewonnene Beziehung

(1) $$Q\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = Arcsin\, x$$

Wendet man nämlich das Binomialtheorem auf den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

an, was für ein ächt gebrochenes x erlaubt ist, so folgt aus No. (1) bei umgekehrter Stellung

$$Arcsin\, x =$$
$$Q\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^6 + \ldots\right]$$
$$1 > x > -1$$

und hier läfst sich die Quadratur der eingeklammerten Reihe dadurch bewerkstelligen, dafs man von jedem einzelnen Gliede derselben die Quadratur bildet. Mit Rücksicht auf die Formel

$$Q(x^m) = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

erhält man auf diese Weise

(2) $$Arcsin\, x$$
$$= \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$

Den Lehren des §. 35. zufolge gilt diese Gleichung so lange, als die Reihe rechter Hand convergirt; diefs letztere ist aber der Fall von $x = -1$ bis $x = +1$, wie in §. 32. gezeigt wurde, und demnach haben wir

(3) $$Arcsin\, x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$
$$1 \geqq x \geqq -1.$$

Setzt man $Arcsin\, x = z$, so folgt umgekehrt $x = sin\, z$; dabei ist jedoch zu bemerken, dafs z auf das Intervall $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ beschränkt bleiben mufs, weil wir unter $Arcsin\, x = z$ den spitzen Bogen verstehen, der x zum Sinus hat. Die Gleichung (3) läfst sich nach diesen Bemerkungen auch in folgender Form darstellen:

(4) $$z = \frac{sin\, z}{1} + \frac{1}{2}\frac{sin^3 z}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{sin^5 z}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{sin^7 z}{7} + \ldots$$
$$\frac{1}{2}\pi \geqq z \geqq -\frac{1}{2}\pi$$

Wählt man den Sinus so, dafs der zugehörige Bogen einen aliquoten Theil des Kreisumfanges ausmacht, so können die Formeln (3) und (4) zur Berechnung der Ludolph'schen Zahl benutzt werden. Für $x = 1$ z. B. ist $Arcsin\, x = \frac{1}{2}\pi$, für $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ wird $Arcsin\, x = \frac{1}{4}\pi$ und für $x = \frac{1}{2}$ ist $Arcsin\, x = \frac{1}{6}\pi$; diese Substitutionen geben unmittelbar

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \dots$$

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.2^1} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5.2^2} + \dots\right]$$

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.2^3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5.2^5} + \dots\dots\dots$$

Jede von diesen Gleichungen kann zur Berechnung von π dienen; am vortheilhaftesten würde die letzte Formel sein, weil die in ihr vorkommende Reihe am raschesten convergirt. Doch werden wir im nächsten Paragraphen bequemere Formeln kennen lernen.

Um zu einer Reihenentwickelung für $Arccos\, x$ zu gelangen, bedarf es keiner neuen Rechnung, sondern nur der Erinnerung an die Formel

$$Arccos\, x = \frac{1}{2}\pi - Arcsin\, x$$

man hat daher auf der Stelle:

$$(5) \qquad Arccos\, x = \frac{1}{2}\pi - \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \dots$$

$$1 \geqq x \geqq -1$$

oder für $Arccos\, x = z$ und $x = cos\, z$

$$(6) \qquad z = \frac{1}{2}\pi - \frac{cos\, z}{1} - \frac{1}{2}\frac{cos^3 z}{3} - \frac{1.3}{2.4}\frac{cos^5 z}{5} - \dots$$

$$\frac{1}{2}\pi \geqq z \geqq -\frac{1}{2}\pi$$

Letztere Formel ergiebt sich auch unmittelbar aus No. (4), wenn man in dieser $\frac{1}{2}\pi - z$ an die Stelle von z treten läfst.

§. 49.

Die Arcustangens-Reihe.

Die Formel, welche wir in §. 16. unter No. (7) kennen gelernt haben, nämlich

$$Q\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = Arctan\, x$$

führt unmittelbar zu einer Reihe für $Arctan\, x$, wenn man die Gleichung

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

in Anwendung bringt, was für ächt gebrochene x erlaubt ist; man hat nämlich

$$Arctan\, x = Q(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots)$$

und wenn man die Quadratur der einzelnen Reihenglieder bildet

$$Arctan\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Diese Gleichung gilt zufolge der in §. 35. entwickelten Sätze so lange, als die Reihe rechter Hand convergirt; diefs ist der Fall von $x = -1$ bis $x = +1$, und mithin haben wir

$$(1) \qquad Arctan\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

$$1 \geqq x \geqq -1$$

Für $Arctan\, x = z$, also $x = tan\, z$ nimmt diese Reihe die folgende Form an:

$$(2) \qquad z = \frac{tan\, z}{1} - \frac{tan^3\, z}{3} + \frac{tan^5\, z}{5} - \ldots$$

$$\frac{1}{4}\pi \geqq z \geqq -\frac{1}{4}\pi.$$

Die Gleichungen (1) und (2) bestimmen den Bogen mittelst seiner Tangente, wenn letztere die Einheit nicht übersteigt, und es wäre daher noch die Frage, wie man den Bogen finden kann für den Fall, dafs seine Tangente mehr als die Einheit beträgt. Hierzu dient die Gleichung

$$Arctan\, x = \frac{1}{2}\pi - Arctan\, \frac{1}{x}$$

die in §. 6. entwickelt worden ist. Wenn nämlich $x > 1$, so ist $\frac{1}{x} < 1$, und nun kann man $Arctan\, \frac{1}{x}$ mittelst der Gleichung (1) entwickeln, indem man $\frac{1}{x}$ an die Stelle von x treten läfst. So wird

$$(3) \qquad Arctan\, x = \frac{1}{2}\pi - \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x^5} - \ldots\right)$$

$$x \geqq 1$$

oder für $Arctan\, x = z$, woraus $x = tan\, z$ und $\frac{1}{x} = cot\, z$ folgt

$$(4) \qquad z = \frac{1}{2}\pi - \left(\frac{cot\, z}{1} - \frac{cot^3\, z}{3} + \frac{cot^5\, z}{5} - \ldots\right)$$

$$z \geqq \frac{1}{4}\pi$$

Hiermit ist zugleich die Aufgabe gelöst, eine Reihe für $Arccot\, x$ zu entwickeln; da nämlich

$$Arccot\, x = \frac{1}{2}\pi - Arctan\, x$$

andererseits

$$Arctan\, \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\pi - Arctan\, x$$

so folgt durch Vergleichung

$$(5) \qquad Arccot\, x = Arctan \frac{1}{x}$$

und es läfst sich daher jeder durch seine Cotangente bestimmte Bogen zugleich als ein solcher ansehen, der durch eine Tangente bestimmt ist.

Die Formel (1) kann zur Berechnung von π dienen, wenn man x so wählt, dafs *Arctan* x einen aliquoten Theil der Peripherie ausmacht. Für $x = 1$ z. B. erhält man die Reihe

$$(6) \qquad \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

die jedoch wegen ihrer aufserordentlich langsamen Convergenz zur Berechnung von π unbrauchbar ist. Eine rascher abnehmende Reihe ergiebt sich für $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, also $Arctan\, x = \frac{1}{6}\pi$; man findet nämlich

$$(7) \qquad \pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^1} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots\right)$$

Am vortheilhaftesten ist die Berechnung von π auf folgende Weise. Für $\alpha\beta < 1$ hat man

$$(8) \qquad Arctan\, \alpha + Arctan\, \beta = Arctan \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}$$

Wählt man nun die ächten Brüche α und β so, dafs

$$(9) \qquad \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta} = 1$$

ist, so machen die beiden Bögen *Arctan* α und *Arctan* β zusammen den Bogen $Arctan\, 1 = \frac{1}{4}\pi$ aus, und indem man die Formel (1) für $x = \alpha$ und $x = \beta$ in Anwendung bringt, ergeben sich zwei Reihen, deren Summe $\frac{1}{4}\pi$ sein mufs. Aus No. (9) folgt aber

$$\beta = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

und wenn man für α einen ächten Bruch setzt, so wird β ebenfalls < 1; die Formel (8) ist jetzt

$$Arctan\, \alpha + Arctan \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = \frac{1}{4}\pi$$

und unter Anwendung von No. (1) ergiebt sich hieraus

$$(10) \qquad \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{1}\alpha - \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{5}\alpha^5 - \frac{1}{7}\alpha^7 + \dots$$
$$+ \frac{1}{1}\left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\right)^5 - \dots$$

wo nun α jeder beliebige positive ächte Bruch sein darf; für $\alpha = \frac{1}{2}$ z. B. wird

$$(11) \qquad \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \dots$$
$$+ \frac{1}{1}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \dots$$

woraus sich π sehr leicht berechnen läfst; man findet

$$\pi = 3,1415926535 \dots .$$

Nicht minder leicht würde es sein, beliebig viele andere Gleichungen aufzustellen, in denen $\frac{1}{4}\pi$ als Summe zweier Reihen erscheint; von allen derartigen Formeln ist jedoch die in No. (11) verzeichnete am bequemsten, weil in jedem anderen Falle die Reihen nach Potenzen von weniger einfachen Brüchen, als es $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ sind, fortschreiten.

§. 50.

Die Bedeutung der imaginären Zahlen.

Wenn man die in §. 41. unter No. (15) und (16) entwickelten für jedes endliche x geltenden Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}$$
$$= 1 + \frac{k^2x^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^4x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{k^6x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

und

$$(2) \qquad \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2k}$$
$$= \frac{x}{1} + \frac{k^2x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{k^6x^7}{1 \cdot 2 \dots 7} + \dots$$

mit den für $\cos x$ und $\sin x$ geltenden Formeln

$$(3) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

und

$$(4) \qquad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \dots 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \dots 7} + \dots$$

vergleicht, so findet man in so fern eine auffallende Übereinstimmung zwischen ihnen, als die Potenzen von x und die darunter stehenden Divisoren in den Reihen (1) und (3) ebenso wie in den Reihen (2) und (4) ganz dieselben sind. Es liegt daher der Gedanke nicht fern, die Reihen zur völ-

ligen Coincidenz zu bringen, indem man die noch willkührliche Constante k so wählt, dafs

$$k^2 = -1,\ k^4 = +1,\ k^6 = -1,\ k^8 = +1 \text{ u. s. f.}$$

wäre. Diese unendlich vielen Bedingungen, denen hier k zugleich genügen soll, reduziren sich aber auf die erste, weil aus der ersten Gleichung $k^2 = -1$ alle übrigen von selbst folgen, indem man sie der Reihe nach auf die zweite, dritte u. s. w. Potenz erhebt. Die Gleichung $k^2 = -1$ giebt nun

$$k = \sqrt{-1}$$

und da für diesen Werth die Reihen in (1) und (3), ebenso die in (2) und (4) zusammenfallen, so müssen jetzt auch die linken Seiten jener Gleichungen identisch werden; diefs gäbe

$$(5)\qquad \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x$$

$$(6)\qquad \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin x$$

Verbindet man diese Gleichungen durch Addition und Subtraktion, nachdem man die zweite Gleichung mit $\sqrt{-1}$ multiplizirt hat, so folgen noch die Beziehungen:

$$(7)\qquad e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x$$

$$(8)\qquad e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\,\sin x$$

Die hiermit gewonnenen vier Gleichungen unterscheiden sich von allen bisher entwickelten Beziehungen in so fern ganz wesentlich, als in ihnen die unmögliche oder, wie man zu sagen pflegt, imaginäre Zahl $\sqrt{-1}$ vorkommt; es betritt die Rechnung an dieser Stelle gewissermafsen ein ganz neues Gebiet, und es mufs daher die nächste Aufgabe sein, sich über die Bedeutung jener Zahl $\sqrt{-1}$ zu orientiren, bevor man weiter mit ihr zu rechnen sich erlauben darf.

Dafs der Versuch, den Cosinus oder Sinus durch Exponenzialgröfsen auszudrücken, auf etwas Unmögliches führen mufste, hätte sich leicht voraussehen lassen. So lange nämlich k eine mögliche positive Zahl bedeutet, ist e^{kx} eine Funktion, welche bei wachsenden x stets zunimmt und positiv bleibt, während e^{-kx} immer abnimmt, ohne jedoch negativ zu werden. Hieraus folgt, dafs auch der Ausdruck

$$(9)\qquad \frac{1}{2}(e^{kx} + e^{-kx}) = \frac{1}{2}\left(e^{kx} + \frac{1}{e^{kx}}\right)$$

eine mit x gleichzeitig unausgesetzt wachsende und immer positiv bleibende Funktion darstellt. Diese Eigenschaften stimmen aber nicht zu

denen des Cosinus, welcher im Gegentheile eine periodisch zwischen $+1$ und -1 hin und her oscillirende Funktion bildet. Ganz ähnlich verhält sich die Sache mit dem Ausdrucke

$$(10) \qquad \frac{1}{2k}(e^{kx} - e^{-kx}) = \frac{1}{2k}\left(e^{kx} - \frac{1}{e^{kx}}\right)$$

welcher mit x ebenfalls gleichzeitig unausgesetzt wächst, ohne negativ zu werden. Es darf daher nicht befremden, dafs es keinen möglichen Werth von k giebt, für welchen die in (9) und (10) verzeichneten Ausdrücke mit $\cos x$ und $\sin x$ zusammenfallen, so wenig wie man eine wellenförmige Curve mit einer krummen Linie von ungefähr parabolischer Gestalt zur Deckung bringen kann. Hiermit würde das, was über die Formeln (5) und (6) zu sagen wäre, erledigt sein, wenn sich nicht eine Bemerkung wiederholen liefse, die wir schon in der Einleitung gemacht haben.

Für denjenigen, der nur positive ganze Zahlen und positive rationale Brüche kennt, also z. B. für jeden, der sich nur auf die Rechnungen des bürgerlichen Lebens versteht, sind irrationale Zahlen und negative Zahlen reine Unmöglichkeiten; diese Unmöglichkeit ist aber, von einem höheren Standpunkte aus betrachtet, keine absolute, sondern nur eine relative, und sie läfst sich in der That durch eine Erweiterung des Zahlengebietes wegschaffen. Wenn wir nun die Zahl $\sqrt{-1}$ eine unmögliche nennen, so ist diefs allerdings in so fern richtig, als es in der bis jetzt aufgestellten Zahlenreihe

$$\ldots -3, \ldots -2, \ldots -1, \ldots 0, \ldots +1, \ldots +2, \ldots +3, \ldots$$

keine Zahl giebt, deren Quadrat $= -1$ wäre, und es also unmöglich ist, sie darin zu finden, doch wäre es auch in diesem Falle denkbar, dafs eine passende Erweiterung des Zahlengebietes zu einer reellen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ führen könnte. Eine derartige Erweiterung kann aber in der Längenrichtung der Zahlenreihe nicht vorgenommen werden, weil bereits nachgewiesen ist, dafs die Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig, d. h. lückenlos verläuft, dafs sie also in dieser Richtung bereits alles Mögliche umfafst; es bleibt daher nur übrig, das Zahlengebiet seitlich zu erweitern, oder mit anderen Worten, das Zahlengebiet nicht als einfache, sondern als Doppelreihe zu betrachten. Diese Bemerkung gewinnt an Gewicht, wenn wir auf die Entstehungsweise der Zahlen zurückblicken. Ist nämlich eine Reihe gleichartiger Gröfsen

$$\ldots d', c', b', a, b, c, d, \ldots$$

gegeben, so dienen die Zahlen

$$\ldots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots$$

um jenen Gröfsen ihre Stellen in der obigen Reihe anzuweisen, wefshalb man auch in vielen Fällen die sprechendere Bezeichnung

$$\ldots a_{-3},\ a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

anwendet; die Zahlen sind demnach die Stellenzeiger der Gröfsen. Dabei ist jedoch die stillschweigende Voraussetzung gemacht, dafs es möglich sei, die gegebenen Gröfsen in eine einfache Reihe zu ordnen; kommen aber Gröfsen vor, welche sich einer derartigen Anordnung nicht fügen, wie z. B. die Glieder einer Doppelreihe, so reicht man natürlich mit den Stellenzeigern einer einfachen Reihe nicht mehr aus, und das Zahlengebiet mufs nun selbst zu einer Doppelreihe erweitert werden.

Denken wir uns eine Doppelreihe von Gröfsen nach dem Schema

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\ldots & \mathfrak{E}', & \mathfrak{D}', & \mathfrak{C}', & \mathfrak{B}', & \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}, & \mathfrak{E}, & \ldots \\
\ldots & E', & D', & C', & B', & A, & B, & C, & D, & E, & \ldots \\
\ldots & \varepsilon', & \delta', & \gamma', & \beta', & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \ldots \\
\ldots & e', & d', & c', & b', & a, & b, & c, & d, & e, & \ldots \\
\ldots & \mathfrak{e}', & \mathfrak{d}', & \mathfrak{c}', & \mathfrak{b}', & \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}, & \mathfrak{e}, & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

und darin α als Anfangspunkt, so ist der Übergang von α und zu einer beliebigen anderen Gröfse, z. B. $\mathfrak{E}$, auf sehr verschiedene Weisen möglich, man könnte in dem vorliegenden Falle die Wege $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon E\mathfrak{E}$ oder $\alpha\beta\gamma D\mathfrak{E}$ einschlagen, also von einer Stelle der Reihe $\alpha\beta\gamma\ldots$ aus in verschiedenen Richtungen fortgehen, um nach $\mathfrak{E}$ zu gelangen. Ist die Doppelreihe eine stetig erfüllte, so dafs also an jeder denkbaren Stelle eine Gröfse steht, so bilden diese Gröfsen zusammen auf dieselbe Weise eine Gröfsenebene, wie die einfache stetige Gröfsenreihe eine Gröfsenlinie darstellt; wir können daher der Anschaulichkeit wegen die Sache unter einem geometrischen Gesichtspunkte betrachten, und es ist diefs ebensowenig eine Anwendung auf die Geometrie, als es die Vergleichung der einfach continuirlichen Gröfsenreihe mit der Geraden sein würde. Nehmen wir in Fig. 12 die Gerade $X'X$ für die Reihe $\ldots\gamma'\beta'\alpha\beta\gamma\ldots$ und den Punkt O für die Gröfse α, so kann der Übergang von O zu einer beliebigen an der Stelle P_u stehenden Gröfse dadurch geschehen, dafs man zunächst eine Strecke OM auf OX fortgeht und sich dann von M nach P_u wendet. Die absolute Länge von OM heifse x, die von MP_u sei y, so ist im Ganzen der Weg $x + y$ zurückgelegt worden, wobei es aber noch eines Kennzeichens bedarf, um anzudeuten, dafs die Richtung des y von der des x verschieden ist. Zu diesem Zwecke wollen wir unter dem Zeichen y_u eine Gerade OP_u verstehen, welche die Länge y besitzt und die mit ihrer anfänglichen Lage OP_0 den Winkel $P_0MP_u = u$ einschliefst. Der zurückgelegte Weg ist dann

(11) $$x + y_u$$

und sowie hier x der Stellenzeiger des Punktes M oder der daselbst befindlichen Gröfse ist, so bedeutet $x + y_u$ den Stellenzeiger des Punktes P_u. Für $u = 0$ hätte man $x + y_0$ als Stellenzeiger von P_0, und da andererseits $OP_0 = x + y$ ist, so folgt

(12) $$y_0 = y = y \,.\, (+1);$$

für $u = \pi$ dagegen wäre $x + y_\pi$ der Stellenzeiger von P_π, und da $OP_\pi = x - y$, so ergiebt sich:

(13) $$y_\pi = -y = y \,.\, (-1)$$

Man erkennt aus diesen Werthen $y_0 = y \,.\, (+1)$ und $y_\pi = y \,.\, (-1)$, dafs der allgemeinere Ausdruck y_u aus zwei Faktoren besteht, deren erster y selbst, d. h. die Länge des Weges MP_u ist, und deren zweiter von dem Winkel u abhängt, indem er die Gröfse der Ablenkung u angiebt. Setzen wir daher

(14) $$y_u = y \,.\, f(u)$$

und suchen wir die unbekannte Funktion $f(u)$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke sei MP_{u+v} eine zweite Gerade, welche mit OX den Winkel $XOP_{u+v} = u + v$ einschliefst und der Länge nach ebenfalls $= y$ ist; man hat dann

(15) $$y_{u+v} = y \,.\, f(u+v)$$

In so fern aber die Gerade y_{u+v} ihrer Richtung nach um den Winkel v von y_u abweicht, mufs auch die Gleichung

$$y_{u+v} = y_u \,.\, f(v)$$

statt finden, indem man y_u als die ursprüngliche und y_{u+v} als die abgelenkte Gerade ansieht; durch Substitution von y_u aus No. (14) verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$y_{u+v} = y \,.\, f(u) \,.\, f(v)$$

deren Vergleichung mit No. (15) zu der Bedingung

$$f(u) \,.\, f(v) = f(u+v)$$

führt. Hieraus bestimmt sich die Natur der Funktion $f(u)$; nach §. 25. ist nämlich

$$f(u) = a^u$$

wobei a eine Constante bezeichnet, deren Werth sich leicht durch die Bemerkung ergiebt, dafs die nunmehrige Gleichung

(16) $$y_u = y a^u$$

für $u = \pi$ mit der Formel (13) zusammenfallen mufs. Man erhält so

$$y_\pi = y a^\pi = y \,.\, (-1)$$

und folglich

$$a = (-1)^{\frac{1}{\pi}}$$

Aus der Gleichung (16) wird jetzt vermöge dieses Werthes von a

(17) $$y_u = y\left[(-1)^{\frac{1}{\pi}}\right]^u = y(-1)^{\frac{u}{\pi}}.$$

Ist der Ablenkungswinkel ein rechter, also $u = \frac{1}{2}\pi$, so folgt

(18) $$y_{\frac{1}{2}\pi} = y(-1)^{\frac{1}{2}} = y\sqrt{-1}$$

und es bedeutet demnach $y\sqrt{-1}$ eine Gerade, welche die Länge y besitzt, aber senkrecht auf ihrer ursprünglichen Richtung steht. Für $OM = x$ und ein rechtwinklig darauf errichtetes $MP = y$ ist nunmehr

$$x + y\sqrt{-1}$$

der Stellenzeiger des Punktes P oder der an dieser Stelle stehenden Gröfse. Für $u = \frac{3}{2}\pi$ würde sich auf ähnliche Weise

$$y_{\frac{3}{2}\pi} = y(-1)^{\frac{3}{2}} = y(-1)\sqrt{-1} = -y\sqrt{-1}$$

ergeben, wonach der Ausdruck

$$x - y\sqrt{-1}$$

als Stellenzeiger des unterhalb liegenden Punktes P' gelten mufs.

In dieser Untersuchung liegt nun die reelle Bedeutung der mit dem, allerdings unpassenden, Namen imaginäre Gröfsen bezeichneten Zahlen. Auf dieselbe Weise nämlich, wie eine reelle Zahl x das Mittel ist, um sich eine bestimmte Stelle der einfachen Gröfsenreihe zu vergegenwärtigen und vor der Einbildung festzuhalten, so dient die Zahl $x + y\sqrt{-1}$ zur Fixirung einer bestimmten Stelle in der Doppelreihe von Gröfsen; setzen wir also z. B. voraus, dafs in der auf Seite 189 verzeichneten Doppelreihe ε von α aus gerechnet an der Stelle x und $\mathfrak{E}$ von ε aus gezählt an der Stelle y stehe, so ist

$x + y\sqrt{-1}$ der Stellenzeiger von $\mathfrak{E}$
$x - y\sqrt{-1}$ - - - ε
$-x + y\sqrt{-1}$ - - - $\mathfrak{E}'$
$-x - y\sqrt{-1}$ - - - ε'.

Zugleich ergiebt sich, dafs die Zahlen $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ für die laterale Erweiterung des Zahlengebietes dasselbe sind, wie $+1$ und -1 für die longitudinale Fortsetzung desselben. Während nämlich $+1$ einen Schritt vorwärts (etwa nach rechts) in der einfachen Zahlenreihe α, β, γ, ... bezeichnet und -1 einen Schritt rückwärts (nach links), so geschieht der Übergang von einem Gliede der Reihe α, β, γ, ... zu dem entsprechenden Gliede der darüberstehenden Reihe (z. B. der Schritt von δ nach D) mittelst der Zahl $+\sqrt{-1}$ und der umgekehrte Übergang zu

dem entsprechenden Gliede der nächst tieferen Reihe (z. B. der Schritt von δ nach d) mittelst der Zahl $-\sqrt{-1}$.

Was nun die Gleichungen (7) und (8) anbelangt, so liegt in ihnen eine wichtige Aufgabe ausgesprochen. Sie zeigen nämlich, dafs die Funktion e^x in zwei neue Funktionen zerfällt, wenn die Variabele imaginär wird; diese Erscheinung kann aber keine vereinzelte sein. Da wir nämlich durch die vorigen Untersuchungen genöthigt worden sind, das Zahlengebiet zu erweitern und Zahlen von der Form $x + y\sqrt{-1}$ zu betrachten, so müssen wir nun auch die Untersuchung der Funktion in demselben Maafse erweitern, wie diefs mit den Zahlen geschehen ist, d. h. auf die Betrachtung der Funktionen reeller Variabelen mufs eine Erörterung über die Funktionen solcher Variabelen folgen, welche von der Form $x + y\sqrt{-1}$ sind und die wir der Kürze wegen complexe veränderliche Zahlen nennen wollen. So wie nun die Funktion einer reellen Variabelen meistentheils wieder eine reelle (abhängige) Variabele ist, so läfst sich voraussehen, dafs die Funktion einer complexen Variabelen im Allgemeinen wiederum von complexer Form sein wird; demnach darf man erwarten, dafs eine Gleichung von der Form

$$f(x + y\sqrt{-1}) = \varphi(x, y) + \psi(x, y)\sqrt{-1}$$

bestehen wird, und es ist nun die Aufgabe, die Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ zu bestimmen, in welche eine gegebene Funktion $f(z)$ zerfällt, sobald an die Stelle der reellen Variabelen z die complexe Variabele $x + y\sqrt{-1}$ gesetzt wird.

Aufserdem liegt uns noch eine zweite Untersuchung ob. Wir wissen, dafs den verschiedenen Funktionen charakteristische Eigenschaften zukommen, der Potenz z. B. die Eigenschaft: $x^\mu \,.\, y^\mu = (xy)^\mu$, der Exponenzialgröfse: $a^x \,.\, a^y = a^{x+y}$ u. s. w., für welche wir aber den Beweis nur unter Voraussetzung reeller Variabelen geführt haben. Ob nun diese Eigenschaften ungestört bleiben, wenn complexe Variabele statt der reellen Veränderlichen gesetzt werden, das ist die Frage, von welcher die weiteren Fortschritte der Analysis abhängen. Diese Frage läfst sich aber beantworten, wenn wir die vorhin genannte Aufgabe gelöst haben.

Capitel XIII.
Die algebraischen Funktionen mit complexen Variabelen.

§. 51.
Die vier Grundrechnungsarten.

Da wir es bei allen folgenden Untersuchungen mit der imaginären Einheit $\sqrt{-1}$ (ein besserer Name wäre laterale oder transversale Einheit) zu thun haben, so möge dieselbe der Kürze wegen immer mit i bezeichnet werden; für diese Zahl gelten demnach die Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} i^2 = -1,\ i^4 = +1,\ i^6 = -1,\ i^8 = +1,\ \dots \\ i^3 = -i,\ i^5 = +i,\ i^7 = -i,\ i^9 = +i,\ \dots \end{cases}$$

welche wir später häufig anwenden werden.

Wenn wir uns daran erinnern, dafs jede Rechnung sich hauptsächlich mit Gleichungen beschäftigt, so mufs die erste Frage die sein, unter welchen Umständen zwei complexe Zahlen $x + yi$ und $\xi + \eta i$ als gleich anzusehen sind. Nun verstehen wir aber unter zwei gleichen reellen Zahlen solche, durch die in der Zahlenreihe eine und dieselbe Stelle bestimmt wird, und es ist nichts natürlicher, als diese Definition auch für complexe Zahlen beizubehalten. Vermöge der Bedeutung der complexen Zahlen folgt hieraus sogleich, dafs

$$(2)\qquad x + yi = \xi + \eta i$$

ist, wenn zwischen den einzelnen reellen Zahlen x, ξ, y und η die Gleichungen

$$(3)\qquad x = \xi,\quad y = \eta$$

statt finden, da aufserdem $x + yi$ eine andere Stelle als $\xi + \eta i$ bezeichnen würde. Nach dieser Definition ist also eine Gleichung zwischen zwei complexen Zahlen nichts weiter als ein Complex von zwei Gleichungen zwischen reellen Zahlen, eine Bemerkung, von der wir häufig Anwendung machen werden.

Die Addition complexer Zahlen bedarf nun zunächst einer Erklärung, da die Definition dieser Rechnung ursprünglich nur für reelle Zahlen gegeben wird und also nicht geradezu auf complexe Zahlen angewendet werden darf. Erinnern wir uns aber, dafs der Entstehung der Addition zufolge die Summe $z + \zeta$ die Zahl bedeutet, auf welche man stöfst, wenn man von der Stelle z aus um ζ Schritte fortgeht, so erhellt augenblicklich, dafs diese Erklärung leicht auf complexe Zahlen ausgedehnt werden kann; unter der Summe $(x + yi) + (\xi + \eta i)$

würde nämlich zu verstehen sein, dafs man von der Stelle $x + yi$ aus um ξ Schritte in horizontaler und dann um η Schritte in vertikaler Richtung fortzuschreiten habe; dabei trifft man auf die Zahl $(x + \xi) + (y + \eta)i$, und wir stellen daher die Gleichung

(4) $$(x + yi) + (\xi + \eta i) = (x + \xi) + (y + \eta)i$$

als die Definition der Summe complexer Zahlen hin.

Die Subtraktion ist das Umgekehrte der Addition, in so fern bei reellen Zahlen die Gleichung $p - q = r$ bedeutet, dafs $p = q + r$ sein soll; behalten wir diese Definition unverändert bei, so müssen in der Gleichung

$$(X + Yi) - (x + yi) = u + vi$$

die beiden unbekannten Zahlen u und v so bestimmt werden, dafs die Gleichung

$$X + Yi = (x + yi) + (u + vi)$$

statt findet; nach No. (4) ist dieselbe einerlei mit der folgenden

$$X + Yi = (x + u) + (y + v)i$$

und zufolge Dessen, was über die Gleichheit complexer Zahlen gesagt wurde, ist weiter

$$X = x + u, \quad Y = y + v$$

mithin

$$u = X - x, \quad v = Y - y$$

Vermöge dieser Werthe haben wir die Gleichung

(5) $$(X + Yi) - (x + yi) = (X - x) + (Y - y)i$$

als Grundformel der Subtraktion complexer Zahlen. Vergleicht man sie und die Formel (4) mit den für reelle Zahlen geltenden Additions- und Subtraktionsregeln, so wird man finden, dafs die Rechnung ganz ebenso geschieht, als wenn i ein reeller Faktor wäre.

Die Multiplikation erfordert wieder eine neue Begriffsbestimmung, weil die ursprüngliche Erklärung dieser Operation nur auf reelle Faktoren pafst. Da nun schon bei der Addition und Subtraktion complexer Zahlen die aufgestellten Definitionen ganz dieselben Resultate lieferten, als wenn die vorhandenen Zahlen reelle wären, so ist es am natürlichsten, die Definition der Multiplikation so einzurichten, dafs hier dieselbe Übereinstimmung statt findet. Unter dem Produkte der complexen Faktoren $x + yi$ und $\xi + \eta i$ verstehen wir demgemäfs den Ausdruck $(x\xi - y\eta) + (x\eta + y\xi)i$, welcher zum Vorschein kommt, wenn man jene Faktoren auf gewöhnliche Weise multiplizirt und beachtet, dafs $i^2 = -1$ ist; die Gleichung

(6) $$(x + yi) \cdot (\xi + \eta i) = (x\xi - y\eta) + (x\eta + y\xi)i$$

enthält demnach die Definition der Multiplikation complexer Zahlen.

Die Division betrachten wir als die Umkehrung der Multiplikation, indem wir unter $\frac{m}{n} = q$ verstehen, dafs $m = nq$ sein soll, bei reellen Zahlen wie bei complexen. Setzen wir also

$$\frac{x + yi}{X + Yi} = u + vi$$

wo u und v erst noch zu bestimmende Zahlen sind, so folgt

$$x + yi = (X + Yi)(u + vi)$$
$$= (Xu - Yv) + (Xv + Yu)i$$

und mithin durch Vergleichung

$$Xu - Yv = x, \quad Xv + Yu = y$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet sich, indem man sie nach u und v auflöst,

$$u = \frac{Xx + Yy}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{Xy - Yx}{x^2 + y^2}$$

mithin durch Substitution

(7) $$\frac{x + yi}{X + Yi} = \frac{Xx + Yy}{X^2 + Y^2} + \frac{Xy - Yx}{X^2 + Y^2} i$$

Zu dieser Gleichung, welche die Definition der Division enthält, kann man auch dadurch gelangen, dafs man Zähler und Nenner des linker Hand stehenden Bruches mit $X - Yi$ multiplizirt, doch ist der obige Weg vorzuziehen.

Fassen wir die bisher gewonnenen Resultate zusammen, so ergiebt sich daraus die allgemeine Regel, dafs die vier Grundoperationen auf complexe Zahlen ganz ebenso wie auf reelle Zahlen anwendbar sind, indem man die Gleichungen (1) beachtet.

Es giebt übrigens noch eine zweite Weise, die Multiplikation und Division complexer Zahlen auszuführen, und zwar gründet sich dieselbe auf die Bemerkung, dafs jede complexe Zahl $x + yi$ auf die Form $r(\cos\theta + i \sin\theta)$ gebracht werden kann, wobei r einen reellen Faktor und θ eine reelle Zahl (als Bogen gedacht) bezeichnet. Setzen wir nämlich

(8) $$x + yi = r(\cos\theta + i \sin\theta) = r\cos\theta + i\, r \sin\theta$$

so folgt durch Vergleichung

$$r\cos\theta = x, \quad r\sin\theta = y.$$

Aus diesen Gleichungen findet man zunächst r, indem man sie quadrirt und addirt, nämlich

(9) $$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{oder} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und um θ zu erhalten, braucht man nur die zweite Gleichung durch die erste zu dividiren; diefs giebt

(10) $$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{oder} \quad \theta = \operatorname{Arctan} x \pm k\pi$$

wobei k eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet. Hiermit haben r und θ ihre Bestimmung gefunden, und zwar nennt man r den Modulus, θ das Argument und $\cos\theta + i\sin\theta$ den reduzirten Ausdruck der complexen Zahl $x + yi$. Diese Transformation hat übrigens eine sehr einfache geometrische Bedeutung, sie ist der Übergang vom rechtwinkligen Coordinatensysteme zu den Polarcoordinaten. Setzen wir nämlich in Fig. 12 $OP = r$, $\angle MOP = \theta$, so ist

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

und mithin

$$x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot$$

Wenn nun zwei complexe Zahlen $x + yi$ und $x' + y'i$ zu multipliziren sind, so sei

$$x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cos\theta + ir\sin\theta$$
$$x' + y'i = r'(\cos\theta' + i\sin\theta') = r'\cos\theta' + ir'\sin\theta'$$

man findet dann

$$\begin{aligned} & r(\cos\theta + i\sin\theta)\,.\,r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ & = rr'\cos\theta\cos\theta' - rr'\sin\theta\sin\theta' \\ & + i[rr'\cos\theta\sin\theta' + rr'\sin\theta\cos\theta'] \end{aligned}$$

d. i. nach sehr bekannten goniometrischen Formeln

(11) $$\begin{aligned} & r(\cos\theta + i\sin\theta)\,.\,r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ & = rr'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')] \end{aligned}$$

In dieser Weise läfst sich auch leicht die Multiplikation beliebig vieler complexer Zahlen ausführen, indem man das vorstehende Theorem mehrmals nach einander anwendet. Man findet so den allgemeineren Satz:

$$\begin{aligned} & r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,.\,r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\,\ldots\,r_m(\cos\theta_m + i\sin\theta_m) \\ & = r_1 r_2 \ldots r_m[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m)] \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise kann die Division complexer Zahlen behandelt werden; multiplizirt man nämlich Zähler und Nenner des Bruches

$$\frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{r'(\cos\theta' + i\sin\theta')}$$

mit dem Faktor $\frac{1}{r'}(\cos\theta' - i\sin\theta')$, wodurch der Nenner in die Einheit übergeht, so folgt

$$\begin{aligned} & \frac{r}{r'}(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta') \\ & + \frac{r}{r'}(\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta') \end{aligned}$$

und nach bekannten goniometrischen Formeln ist diefs

(12) $$\frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{r'(\cos\theta' + i\sin\theta')} = \frac{r}{r'}[\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')]$$
was sich ebenfalls leicht auf mehrere Divisoren ausdehnen liefse.

§. 52.

Die Potenzirung complexer Zahlen.

So wie man in der Arithmetik der reellen Zahlen unter dem Symbole z^m, worin z beliebig und m eine ganze positive Zahl sein möge, ein Produkt aus m Faktoren versteht, deren jeder $= z$ ist, so möge auch

$$(x + yi)^m$$

das Produkt bezeichnen, welches entsteht, wenn in dem Produkte

$$(x_1 + y_1 i)\ (x_2 + y_2 i)\ (x_3 + y_3 i)\ \ldots\ (x_m + y_m i)$$

sämmtliche Faktoren gleich werden, also

$$x_1 = x_2 = x_3 \ldots = x_m = x$$
$$y_1 = y_2 = y_3 \ldots = y_m = y$$

ist. Denken wir uns jeden der complexen Faktoren durch seinen Modulus und sein Argument ausgedrückt, so verwandelt sich die Gleichung

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \,.\, r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \ldots r_m(\cos\theta_m + i\sin\theta_m)$$
$$= r_1 r_2 \ldots r_m[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m)]$$

bei gleichen Faktoren in die folgende:

(1) $$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)$$

mittelst welcher die Potenzirung für ganze positive Exponenten jederzeit ausführbar ist.

Verstehen wir ferner bei positiven ganzen p und q unter den beiden gleichgeltenden Ausdrücken

$$\sqrt[q]{(x + yi)^p} = (x + yi)^{\frac{p}{q}}$$

diejenige Zahl, deren $q$te Potenz gleich $(x + yi)^p$ ist, so gelten folgende Schlüsse: es ist

$$\left[r^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p\theta}{q} + i\sin\frac{p\theta}{q}\right)\right]^q = r^p\left[\cos\left(q\frac{p\theta}{q}\right) + i\sin\left(q\frac{p}{q}\theta\right)\right]$$
$$= r^p[\cos p\theta + i\sin p\theta]$$
$$= [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^p$$

mithin nach der obigen Definition

$$r^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p\theta}{q} + i\sin\frac{p\theta}{q}\right) = \sqrt[q]{[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^p}$$
$$= [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{p}{q}}$$

oder bei umgekehrter Stellung

(2) $$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{p}{q}} = r^{\frac{p}{q}}\left[\cos\left(\frac{p}{q}\theta\right) + i\sin\left(\frac{p}{q}\theta\right)\right]$$

Vergleicht man diese Formel mit der unter No. (1) verzeichneten, so kann man beide in der Weise zusammenfassen, dafs man sagt: für jedes positive und rationale λ gilt die Gleichung

(3) $$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\lambda} = r^{\lambda}[\cos\lambda\theta + i\sin\lambda\theta]$$

Diefs läfst sich auch leicht auf irrationale λ ausdehnen; da nämlich irrationale Zahlen als Gränzwerthe rationaler Brüche angesehen werden können (z. B. $\sqrt{2} = Lim\ 1{,}41423\ldots$), so braucht man nur λ sich fortwährend so verändern zu lassen, dafs es sich einer Irrationalzahl als Gränze nähert, um sogleich die Gültigkeit der Formel (2) für irrationale Zahlen einzusehen. Die Gleichung (2) besteht demnach für alle positiven λ.

Lassen wir in der aus No. (12) des vorigen Paragraphen folgenden Gleichung

$$\frac{1}{r'(\cos\theta' + i\sin\theta')} = \frac{1}{r'}[\cos(-\theta') + i\sin(-\theta')]$$

r^{λ} an die Stelle von r' und $\lambda\theta$ an die von θ' treten, so folgt

$$\frac{1}{r^{\lambda}(\cos\lambda\theta + i\sin\lambda\theta)} = \frac{1}{r^{\lambda}}[\cos(-\lambda\theta) + i\sin(-\lambda\theta)]$$

oder durch Anwendung der Formel (2) auf die linke Seite

$$\frac{1}{[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\lambda}} = r^{(-\lambda)}[\cos(-\lambda)\theta + i\sin(-\lambda)\theta]$$

So wie nun unter $z^{-\lambda}$ der Ausdruck $\frac{1}{z^{\lambda}}$ verstanden wird, so wollen wir

$$\frac{1}{(x+yi)^{\lambda}} \quad \text{mit} \quad (x+yi)^{-\lambda}$$

bezeichnen; es ist dann dieser Definition zufolge

(4) $$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-\lambda} = r^{-\lambda}[\cos(-\lambda)\theta + i\sin(-\lambda)\theta]$$

Die dritte und vierte Gleichung endlich können zu der für jedes reelle μ geltenden Formel

(5) $$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\mu} = r^{\mu}(\cos\mu\theta + i\sin\mu\theta)$$

zusammengefafst werden, welche unter dem Namen des Moivre'schen Satzes bekannt ist. Dieselbe lehrt die Potenzirung einer complexen Zahl, indem man für

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = Arctan\frac{y}{x}$$

daraus erhält

(6) $$(x+yi)^{\mu}$$
$$= (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}\mu}\left[\cos\left(\mu\, Arctan\frac{y}{x}\right) + i\sin\left(\mu\, Arctan\frac{y}{x}\right)\right]$$

Das Moivre'sche Theorem liefert den Beweis, dafs die für reelle z und z' geltende Eigenschaft der Potenz

$$(zz')^\mu = z^\mu \,.\, z'^\mu$$

auch für complexe Grundzahlen gültig bleibt. Sind nämlich beide complexe Zahlen auf die Formen

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{und} \quad r'(\cos\theta + i\sin\theta')$$

gebracht, so hat man

$$\begin{aligned}
&[r(\cos\theta + i\sin\theta) \,.\, r'(\cos\theta' + i\sin\theta')]^\mu \\
&= \left\{rr'[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]\right\}^\mu \\
&= (rr')^\mu [\cos\mu(\theta+\theta') + i\sin\mu(\theta+\theta')] \\
&= r^\mu r'^\mu (\cos\mu\theta + i\sin\mu\theta)(\cos\mu\theta' + i\sin\mu\theta') \\
&= [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^\mu \,.\, [r'(\cos\theta' + i\sin\theta')]^\mu
\end{aligned}$$

wo nun der Vergleich des ersten und letzten Ausdruckes jene Behauptung rechtfertigt.

Eine brauchbare Anwendung des Theoremes (1) ist noch folgende. Die linke Seite der Gleichung

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta$$

werde nach dem Binomialtheoreme für ganze positive Exponenten entwickelt, was hier erlaubt ist, weil dieses Theorem nichts weiter als das ausgerechnete Resultat einer $m$fachen Multiplikation bildet, die auf complexe Zahlen ebenso wie auf reelle Faktoren pafst; man hat dann mit Rücksicht auf die Gleichungen $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$, $i^5 = +i$ etc.

$$\begin{aligned}
&m_0 \cos^m\theta - m_2 \cos^{m-2}\theta \sin^2\theta + m_4 \cos^{m-4}\theta \sin^4\theta - \ldots \\
&+ i[m_1 \cos^{m-1}\theta \sin\theta - m_3 \cos^{m-3}\theta \sin^3\theta + m_5 \cos^{m-5}\theta \sin^5\theta - \ldots] \\
&= \cos m\theta + i\sin m\theta
\end{aligned}$$

und folglich durch beiderseitige Vergleichung:

$$(7) \quad \cos m\theta = m_0 \cos^m\theta - m_2 \cos^{m-2}\theta \sin^2\theta + m_4 \cos^{m-4}\theta \sin^4\theta - \ldots$$

$$(8) \quad \sin m\theta = m_1 \cos^{m-1}\theta \sin\theta - m_3 \cos^{m-3}\theta \sin^3\theta + m_5 \cos^{m-5}\theta \sin^5\theta - \ldots$$

womit ein paar brauchbare goniometrische Formeln gewonnen sind; man kann ihnen auch folgende Gestalt geben:

$$(9) \quad \frac{\cos m\theta}{\cos^m\theta} = m_0 - m_2 \tan^2\theta + m_4 \tan^4\theta - m_6 \tan^6\theta + \ldots$$

$$(10) \quad \frac{\sin m\theta}{\cos^m\theta} = m_1 \tan\theta - m_3 \tan^3\theta + m_5 \tan^5\theta - \ldots$$

Wir werden später auf diese Formeln zurückkommen.

§. 53.

Auflösung der Gleichungen

$x^n = 1$ und $x^{\frac{n}{m}} = 1$.

Eine der einfachsten Anwendungen, welche sich von den Sätzen der vorigen Paragraphen machen lassen, ist die Auflösung der Gleichungen

$$x^n = 1 \quad \text{und} \quad x^{\frac{n}{m}} = 1,$$

d. h. die Aufsuchung ihrer reellen und imaginären Wurzeln.

I. Da die Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$ im Allgemeinen auch imaginär sein können, so wollen wir

(1) $$x = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

setzen, wo noch r und θ zu bestimmen sind.

Da nun $x^n = 1$ sein soll, so folgt hieraus

(2) $$1 = r^n\,(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Diese Gleichung läfst sich leicht dadurch befriedigen, dafs man nimmt

$$r = 1 \quad \text{und} \quad n\theta = \pm 2k\pi$$

wo k jede ganze positive Zahl bedeuten kann. Denn man hat dann $r^n = 1$, $\cos n\theta = \cos 2k\pi = +1$, $\sin n\theta = \sin 2k\pi = 0$, wodurch sich die Gleichung auf die Identität $1 = r$ reduzirt. Aus $n\theta = \pm 2k\pi$ folgt aber $\theta = \pm \frac{2k}{n}\pi$, folglich nach (1)

(3) $$x = \cos\frac{2k}{n}\pi \pm i\sin\frac{2k}{n}\pi$$

wo nun k jede beliebige positive Zahl bedeuten kann. Hieraus scheint zu folgen, dafs es unendlich viel verschiedene Werthe für x und mithin unendlich viel Auflösungen der Gleichung (1) giebt; in der That aber ist diefs nicht der Fall, sondern die Anzahl der von einander wirklich verschiedenen Werthe von x ist nur eine begränzte und zwar $= n$. Man überzeugt sich hiervon leicht durch folgende Betrachtungen.

Ist n eine gerade Zahl, so kann man die auf einander folgenden Werthe von k in folgender Weise gruppiren:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ \frac{n}{2}-2,\ \frac{n}{2}-1,\ \frac{n}{2},$$

$$\frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}+2,\ \ldots\ n-2,\ n-1,\ n,$$

$$n+1,\ n+2,\ \ldots\ \frac{3n}{2}-2,\ \frac{3n}{2}-1,\ \frac{3n}{2},$$

$$\frac{3n}{2}+1,\ \frac{3n}{2}+2,\ \ldots\ 2n-2,\ 2n-1,\ 2n,$$

u. s. f.

die sich auch so darstellen lassen:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ \frac{n}{2}-2,\quad \frac{n}{2}-1,\quad \frac{n}{2},$$

$$n-\left(\frac{n}{2}-1\right),\ n-\left(\frac{n}{2}-2\right),\ \ldots\ n-2,\quad n-1,\quad n,$$

$$n+1,\quad n+2,\quad \ldots\ n+\left(\frac{n}{2}-2\right),\ n+\left(\frac{n}{2}-1\right),\ \frac{3n}{2},$$

$$2n-\left(\frac{n}{2}-1\right),\ 2n-\left(\frac{n}{2}-2\right),\ \ldots\ 2n-2,\quad 2n-1,\quad 2n$$

u. s. f.

Die erste Horizontalreihe giebt nun für x folgende Werthe:

$$(4)\qquad 1,\ \cos\frac{2}{n}\pi \pm i\sin\frac{2}{n}\pi,\ \cos\frac{4}{n}\pi \pm i\sin\frac{4}{n}\pi,\ \ldots$$

$$\ldots\cos\frac{n-4}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-4}{n}\pi,\ \cos\frac{n-2}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-2}{n}\pi,\ -1$$

Nimmt man jetzt für k in (3) die Werthe der zweiten Horizontalreihe und bemerkt, daſs immer $\cos(2\pi \mp h\pi) = \cos h\pi$ und $\sin(2\pi \pm h\pi) = \sin h\pi$ ist, so erhält man der Reihe nach

$$\cos\left(2\pi - \frac{n-2}{n}\pi\right) \pm i\sin\left(2\pi - \frac{n-2}{n}\pi\right) = \cos\frac{n-2}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-2}{n}\pi$$

$$\cos\left(2\pi - \frac{n-4}{n}\pi\right) \pm i\sin\left(2\pi - \frac{n-4}{n}\pi\right) = \cos\frac{n-4}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-4}{n}\pi$$

u. s. f.

d. h. man bekommt die schon gefundenen Werthe von x in (4) noch einmal in umgekehrter Ordnung. Nimmt man für k die Zahlen der dritten Horizontalreihe, so erhält man wieder die Werthe in (4), aber in der nämlichen Ordnung; substituirt man die Zahlen der vierten Reihe für k, so findet man wieder die Werthe (4), aber in umgekehrter Ordnung u. s. f. — Da wir also durch weitere Fortsetzung nichts Neues erhalten, so haben wir für x, blos die in (4) aufgezählten, wirklich von einander verschiedenen Werthe, deren Anzahl n beträgt.

Bemerkt man noch, daſs aus $x^n = 1$ folgt $x = \sqrt[n]{1}$, so können wir jetzt sagen:

Für ein gerades n hat $\sqrt[n]{+1}$ folgende n Werthe:

$$(5)\qquad \begin{array}{ll} +1, & -1 \\ \cos\frac{2}{n}\pi + i\sin\frac{2}{n}\pi, & \cos\frac{2}{n}\pi - i\sin\frac{2}{n}\pi \\ \cos\frac{4}{n}\pi + i\sin\frac{4}{n}\pi, & \cos\frac{4}{n}\pi - i\sin\frac{4}{n}\pi \\ \cos\frac{6}{n}\pi + i\sin\frac{6}{n}\pi, & \cos\frac{6}{n}\pi - i\sin\frac{6}{n}\pi \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \cos\frac{n-2}{n}\pi + i\sin\frac{n-2}{n}\pi, & \cos\frac{n-2}{n}\pi - i\sin\frac{n-2}{n}\pi \end{array}$$

Für ein ungerades n lassen sich die Werthe des k folgendermaſsen gruppiren:

$$\begin{array}{llllll} 0, & 1, & 2, \; 3, \; 4, & \ldots\ldots & \frac{n-3}{2}, & \frac{n-1}{2} \\ n-\frac{n-1}{2}, & n-\frac{n-3}{n}, & \ldots & & n-2, & n-1 \\ n, & n+1, & n+2, & \ldots\ldots & n+\frac{n-3}{2}, & n+\frac{n-1}{2} \end{array}$$

u. s. f.

Mittelst der Formel (3) bekommt man hier aus der ersten Horizontalreihe für x die Werthe:

$$(6)\qquad 1,\quad \cos\frac{2}{n}\pi \pm i\sin\frac{2}{n}\pi,\quad \cos\frac{4}{n}\pi \pm i\sin\frac{4}{n}\pi,\ \ldots$$

$$\ldots \cos\frac{n-3}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-3}{n}\pi,\quad \cos\frac{n-1}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-1}{n}\pi$$

aus der zweiten Horizontalreihe:

$$\cos\left(2\pi - \frac{n-1}{n}\pi\right) \pm i\sin\left(2\pi - \frac{n-1}{n}\pi\right) = \cos\frac{n-1}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-1}{n}\pi$$

$$\cos\left(2\pi - \frac{n-3}{n}\pi\right) \pm i\sin\left(2\pi - \frac{n-3}{n}\pi\right) = \cos\frac{n-3}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-3}{n}\pi$$

u. s. f.

d. h. die nämlichen Werthe wie in (6), nur in umgekehrter Ordnung. Ebenso würde man aus der dritten Horizontalreihe wieder die Werthe (6) in derselben Ordnung erhalten u. s. f. Als wirklich verschiedene Werthe bleiben uns also blos die in (6) stehenden, deren Anzahl n beträgt. Wir können also folgendes Theorem aussprechen:

Für ein ungerades n hat $\sqrt[n]{+1}$ folgende n Werthe:

$$(7)\qquad\qquad +1,$$

$$\cos\frac{2}{n}\pi + i\sin\frac{2}{n}\pi, \qquad \cos\frac{2}{n}\pi - i\sin\frac{2}{n}\pi$$

$$\cos\frac{4}{n}\pi + i\sin\frac{4}{n}\pi, \qquad \cos\frac{4}{n}\pi - i\sin\frac{4}{n}\pi$$

$$\cos\frac{6}{n}\pi + i\sin\frac{6}{n}\pi, \qquad \cos\frac{6}{n}\pi - i\sin\frac{6}{n}\pi$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{n-1}{n}\pi + i\sin\frac{n-1}{n}\pi, \qquad \cos\frac{n-1}{n}\pi - i\sin\frac{n-1}{n}\pi$$

In allen Fällen, wo sich die Theilung des Kreises in $2n$ Theile geometrisch ausführen läfst, kann man die in (5) und (7) vorkommenden Cosinus und Sinus algebraisch ausdrücken. So erhält man z. B. aus (5) für $n = 6$, als die Werthe von $\sqrt[6]{+1}$,

$$+1, \qquad -1$$

$$\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi, \qquad \cos\frac{1}{3}\pi - i\sin\frac{1}{3}\pi$$

$$\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi, \qquad \cos\frac{2}{3}\pi - i\sin\frac{2}{3}\pi$$

d. i.

$$+1 \qquad -1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1}, \qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1}, \qquad -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1}$$

Nimmt man in Formel (7) $n = 5$, und beachtet, dafs aus der Construktion des regulären Fünfecks

$$\cos\frac{1}{5}\pi = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

gefunden wird, woraus man leicht $\cos\frac{2}{5}\pi$, $\cos\frac{4}{5}\pi$ und $\sin\frac{2}{5}\pi$, $\sin\frac{4}{5}\pi$ ableitet, so finden sich folgende Werthe für $\sqrt[5]{+1}$:

$$+1,$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}, \qquad \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}$$

$$-\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}, \qquad -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}$$

II. Es hat nun auch keine Schwierigkeit, die Wurzeln der allgemeinen Gleichung

$$x^{\frac{n}{m}} = 1$$

d. h. die verschiedenen Werthe der Wurzel $\sqrt[n]{(+1)^m}$ zu finden. Da nämlich

$$\sqrt[n]{(+1)^m} = (+1)^{\frac{m}{n}} = \left[(+1)^{\frac{1}{n}}\right]^m$$

ist, so braucht man nur die für $(+1)^{\frac{1}{n}}$ gefundenen Ausdrücke auf die $m$te Potenz zu erheben, oder, was vermöge des Moivre'schen Theoremes auf das Nämliche hinausläuft, statt π in den Formeln (3), (5) und (7) $m\pi$ zu substituiren.

Da nach unserer Definition

$$(+1)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(+1)^{\frac{m}{n}}}$$

ist, so kann man jetzt auch die Gleichung $x^{-\frac{n}{m}} = 1$ auflösen. Es ist nämlich

$$x = \frac{1}{(+1)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\cos\frac{2mk}{n}\pi \pm i\sin\frac{2mk}{n}\pi}$$

d. i.

$$x = \cos\frac{2mk}{n}\pi \mp i\sin\frac{2mk}{n}\pi$$

woraus man sieht, daſs die Gröſse $(+1)^{-\frac{m}{n}}$ die nämlichen n Werthe hat wie $(+1)^{\frac{m}{n}}$.

Lassen wir m und n so ins Unendliche wachsen, daſs sich der Bruch $\frac{m}{n}$ einer irrationalen Gränze μ nähert, so wird die Anzahl der Werthe von $(+1)^{\mu}$ unendlich und wir bekommen

$$(+1)^{\mu} = \cos 2\mu k\pi \pm i\sin 2\mu k\pi$$

wo man nun für k alle möglichen positiven ganzen Zahlen setzen kann, ohne jemals einem schon gefundenen Werthe zum zweiten Male zu begegnen.

Hat man allgemein für ein beliebiges rationales oder irrationales μ die Werthe von $(\alpha + \beta i)^{\mu}$ zu bestimmen, so bringe man $\alpha + \beta i$ auf die Form $(+1)\, r(\cos\theta + i\sin\theta)$; dann ist

$$(\alpha + \beta i)^\mu = (+1)^\mu\, r^\mu (\cos\theta + i \sin\theta)^\mu$$
$$= (+1)^\mu\, r^\mu (\cos\mu\theta + i \sin\mu\theta)$$

wo man nun für r^μ den einen absoluten Werth dieser Gröfse und für $(+1)^\mu$ das zu setzen hat, was wir für die verschiedenen Fälle gefunden haben.

§. 54.

Auflösung der Gleichungen

$$x^n = -1 \text{ und } x^{\frac{n}{m}} = -1.$$

I. Da die Gleichung $x^n = -1$, worin n eine ganze positive Zahl bedeutet, auch imaginäre Wurzeln haben kann, so wollen wir

(1) $$x = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

setzen und r und θ zu bestimmen suchen. Da nun $x^n = -1$ werden soll, so mufs auch

$$r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = -1$$

sein. Dieser Gleichung kann man Genüge leisten, wenn man $r = 1$ und $n\theta = \pm(2k+1)\pi$ nimmt, worin für k jede ganze positive Zahl gesetzt werden darf. Es folgt hieraus $\theta = \pm\frac{2k+1}{n}\pi$, mithin aus (1)

(2) $$x = \cos\frac{2k+1}{n}\pi \pm i \sin\frac{2k+1}{n}\pi.$$

Da hier k jede beliebige positive ganze Zahl sein kann, so scheint zu folgen, dafs es eine unbegränzte Menge von Auflösungen geben müsse. Indessen reduzirt sich ihre Zahl von selbst auf eine endliche Gröfse, wie man aus folgenden Betrachtungen sieht, die den im vorigen Paragraphen durchgeführten ganz ähnlich sind.

1) Für ein gerades n kann man die Werthe von k folgendermafsen gruppiren:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ldots \frac{n}{2}-2,\ \frac{n}{2}-1,$$
$$n-\frac{n}{2},\ n-\left(\frac{n}{2}-1\right), \ldots\ n-2,\ n-1,$$
$$n,\ n+1, \ldots\ldots\ldots\ n+\left(\frac{n}{2}-2\right),\ n+\left(\frac{n}{2}-1\right),$$
$$2n-\frac{n}{2},\ 2n-\left(\frac{n}{2}-1\right), \ldots\ 2n-2,\ 2n-1,$$

u. s. f.

Setzt man für k in Formel (2) die Werthe der ersten Horizontalreihe, so erhält man für x der Reihe nach:

(3) $$\cos\frac{1}{n}\pi \pm i\sin\frac{1}{n}\pi,\quad \cos\frac{3}{n}\pi \pm i\sin\frac{3}{n}\pi,\ \ldots$$
$$\ldots\ \cos\frac{n-3}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-3}{n}\pi,\quad \cos\frac{n-1}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-1}{n}\pi$$

Aus der zweiten Horizontalreihe erhält man für x die Werthe

$$\cos\left(2\pi-\frac{n-1}{n}\pi\right) \pm i\sin\left(2\pi-\frac{n-1}{n}\right)\pi = \cos\frac{n-1}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-1}{n}\pi$$
$$\cos\left(2\pi-\frac{n-3}{n}\pi\right) \pm i\sin\left(2\pi-\frac{n-3}{n}\right)\pi = \cos\frac{n-3}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-3}{n}\pi$$

u. s. f.

d. h. die nämlichen wie in (3), nur in umgekehrter Ordnung. Die Werthe von k in der dritten Horizontalreihe liefern für x die Ausdrücke:

$$\cos\left(2\pi+\frac{1}{n}\pi\right) \pm i\sin\left(2\pi+\frac{1}{n}\pi\right) = \cos\frac{1}{n}\pi \pm i\sin\frac{1}{n}\pi$$
$$\cos\left(2\pi+\frac{3}{n}\pi\right) \pm i\sin\left(2\pi+\frac{3}{n}\pi\right) = \cos\frac{3}{n}\pi \pm i\sin\frac{3}{n}\pi$$

u. s. f.

d. h. die Werthe aus (3) in derselben Ordnung. Auf diese Weise fortgehend, findet man immer die nämlichen Werthe für x, die wir in (3) kennen gelernt haben, bald in umgekehrter, bald in derselben Ordnung. Wirklich verschiedene Werthe sind also blos die in (3), deren Anzahl n ist. Bemerkt man noch, dafs aus $x^n = -1$ folgt $x = \sqrt[n]{-1}$, so kann man sagen:

Für ein gerades n hat $\sqrt[n]{-1}$ folgende n Werthe:

(4)
$$\cos\frac{1}{n}\pi + i\sin\frac{1}{n}\pi,\qquad \cos\frac{1}{n}\pi - i\sin\frac{1}{n}\pi$$
$$\cos\frac{3}{n}\pi + i\sin\frac{3}{n}\pi,\qquad \cos\frac{3}{n}\pi - i\sin\frac{3}{n}\pi$$
$$\cos\frac{5}{n}\pi + i\sin\frac{5}{n}\pi,\qquad \cos\frac{5}{n}\pi - i\sin\frac{5}{n}\pi$$
$$\ldots\ldots\ldots\qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$\cos\frac{n-1}{n}\pi + i\sin\frac{n-1}{n}\pi,\qquad \cos\frac{n-1}{n}\pi - i\sin\frac{n-1}{n}\pi$$

welche sämmtlich imaginär sind, wie man ohnehin daraus sieht, dafs jede reelle Zahl, auf eine gerade Potenz erhoben, eine positive Gröfse liefert.

2) Für ein ungerades n lassen sich die Werthe von k so schreiben:

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots\ldots \frac{n-5}{2},\quad \frac{n-3}{2},\quad \frac{n-1}{2},$$

$$n-\frac{n-1}{2},\quad n-\frac{n-3}{2},\quad \ldots\ldots\ldots\ n-2,\quad n-1,$$

$$n,\quad n+1,\quad \ldots\ldots\ n+\frac{n-3}{2},\quad n+\frac{n-1}{2},$$

u. s. f.

Nimmt man für k die Werthe der ersten Horizontalreihe, so ergeben sich nach (2) folgende Werthe von x:

(5)
$$\cos\frac{1}{n}\pi \pm i\sin\frac{1}{n}\pi,\quad \cos\frac{3}{n}\pi \pm i\sin\frac{3}{n}\pi,\ \ldots$$

$$\ldots \cos\frac{n-4}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-4}{n}\pi,\quad \cos\frac{n-2}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-2}{n}\pi,\ -1$$

Aus der zweiten Horizontalreihe findet man:

$$\cos\left(2\pi-\frac{n-2}{n}\pi\right) \pm i\sin\left(2\pi-\frac{n-2}{n}\pi\right) = \cos\frac{n-2}{n}\pi \mp i\sin\frac{n-2}{n}\pi$$

$$\cos\left(2\pi-\frac{n-4}{n}\pi\right) \pm i\sin\left(2\pi-\frac{n-4}{n}\pi\right) = \cos\frac{n-4}{n}\pi \mp i\sin\frac{n-4}{n}\pi$$

u. s. f.

d. h. die Ausdrücke in (5), mit Ausnahme des letzten, nur in umgekehrter Ordnung. Die dritte Horizontalreihe für k würde für x genau dieselben Werthe liefern, wie die in (5) schon gefundenen u. s. f. Als wirklich verschiedene Werthe bleiben also blos die in (5) stehen und folglich kann man sagen:

Für ein ungerades n hat $\sqrt[n]{-1}$ folgende n Werthe:

(6)
$$-1,$$

$$\cos\frac{1}{n}\pi + i\sin\frac{1}{n}\pi,\qquad \cos\frac{1}{n}\pi - i\sin\frac{1}{n}\pi$$

$$\cos\frac{3}{n}\pi + i\sin\frac{3}{n}\pi,\qquad \cos\frac{3}{n}\pi - i\sin\frac{3}{n}\pi$$

$$\cos\frac{5}{n}\pi + i\sin\frac{5}{n}\pi,\qquad \cos\frac{5}{n}\pi - i\sin\frac{5}{n}\pi$$

$$\ldots\ldots\ldots\qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$\cos\frac{n-2}{n}\pi + i\sin\frac{n-2}{n}\pi,\qquad \cos\frac{n-2}{n}\pi - i\sin\frac{n-2}{n}\pi$$

von denen nur einer, nämlich -1, reell ist.

Auch hier ist es leicht, in solchen Fällen, wo sich die Theilung des Kreises in $2n$ Theile geometrisch construiren läfst, die Werthe der einzelnen Cosinus und Sinus algebraisch darzustellen. So erhält man z. B. für $n=4$ aus (4) folgende Werthe von $\sqrt[4]{-1}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}$$

und aus (6) für $n = 3$ folgende Ausdrücke für $\sqrt[3]{-1}$:

$$-1,$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}, \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}.$$

II. **Hat man die Gleichung $x^{\frac{n}{m}} = -1$ aufzulösen, d. h. die Werthe von $(-1)^{\frac{m}{n}}$ aufzusuchen**, so braucht man vermöge der Gleichung

$$(-1)^{\frac{m}{n}} = \left[(-1)^{\frac{1}{n}}\right]^m$$

nur die für $(-1)^{\frac{1}{n}}$ gefundenen Werthe auf die $m$te Potenz zu erheben, oder, was das Nämliche ist, in denselben $m\pi$ für π zu setzen.

Ebenso findet man

$$(-1)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(-1)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\cos\frac{m(2k+1)}{n}\pi \pm i\sin\frac{m(2k+1)}{n}\pi}$$

$$= \cos\frac{m(2k+1)}{n}\pi \mp i\sin\frac{m(2k+1)}{n}\pi$$

Läfst man m und n gleichzeitig so wachsen, dafs $\frac{m}{n}$ sich einer Irrationalzahl μ als Gränze nähert, so wird

$$(-1)^\mu = \cos\mu(2k+1)\pi \pm i\sin\mu(2k+1)\pi$$

wo nun für k jede ganze positive Zahl gesetzt wird.

Um die Werthe von $(-\alpha-\beta i)^\mu$ zu bestimmen, wo μ eine ganz beliebige Gröfse bezeichnet, bringe man $-\alpha-\beta i$ auf die Form $(-1)\, r(\cos\theta + i\sin\theta)$; dann ist

$$(-\alpha-\beta i)^\mu = (-1)^\mu\, r^\mu(\cos\mu\theta + i\sin\mu\theta)$$

wo nun für r^μ der eine absolute Werth dieser Gröfse und für $(-1)^\mu$ das zu setzen ist, was die Formeln dieses Paragraphen im speziellen Falle verlangen.

§. 55.

Das Theorem von Cotes.

Durch die in den beiden vorigen Paragraphen gefundenen Resultate ist es auch möglich, die Funktionen $x^n - 1$ und $x^n + 1$ in Faktoren zu zerfällen.

Da Aufsuchung der Wurzeln von $x^n - 1 = 0$ oder $x^n + 1 = 0$ nichts Anderes als Bestimmung derjenigen Werthe von x ist, für welche die Funktionen $x^n - 1$ und $x^n + 1$ sich annulliren, so können wir hier die Lehren des §. 21. in Anwendung bringen, indem wir für $f(x)$ einmal $x^n - 1$, dann $x^n + 1$ und für $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichungen $x^n = 1$ und $x^n = -1$ setzen.

I. Bezeichnen wir nun mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$, so ist nach Formel (3) §. 21.:

$$x^n - 1 = k(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Die Gröfse k mufs hier $= 1$ sein, weil x^n den Coeffizienten 1 besitzt und bei wirklicher Ausführung der Multiplikation k der Coeffizient von x^n werden würde.

Setzen wir nun für $x_1, x_2, \ldots x_n$ ihre Werthe aus (5) und (7) in §. 53. und führen die angedeuteten Multiplikationen blos für zwei neben einander stehende Wurzeln aus, so erhalten wir, unter der Bemerkung, dafs

$$\left(x - \cos\frac{2k}{n}\pi - i\sin\frac{2k}{n}\pi\right)\left(x - \cos\frac{2k}{n}\pi + i\sin\frac{2k}{n}\pi\right)$$
$$= \left(x - \cos\frac{2k}{n}\pi\right)^2 - \left(i\sin\frac{2k}{n}\pi\right)^2$$
$$= x^2 - 2x\cos\frac{2k}{n}\pi + 1$$

ist, Folgendes:

Für ein gerades n

$$(1)\qquad x^n - 1$$
$$= (x^2 - 1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2}{n}\pi + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4}{n}\pi + 1\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2x\cos\frac{n-2}{n}\pi + 1\right)$$

und für ein ungerades n

$$(2)\qquad x^n - 1$$
$$= (x - 1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2}{n}\pi + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4}{n}\pi + 1\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2x\cos\frac{n-1}{n}\pi + 1\right)$$

Setzt man hier $\frac{x}{a}$ für x und multiplizirt beiderseits mit a^n, so ergiebt sich noch:

Für ein gerades n

(3)
$$x^n - a^n$$
$$= (x^2 - a^2)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4}{n}\pi + a^2\right)\dots$$
$$\dots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2\right)$$

und für ein ungerades n

(4)
$$x^n - a^n$$
$$= (x - a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4}{n}\pi + a^2\right)\dots$$
$$\dots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2\right)$$

11. Etwas ganz Ähnliches läfst sich für die Funktion $x^n + 1$ leisten. Bezeichnet man mit $x_1, x_2, \dots x_n$ die Wurzeln der Gleichung $x^n + 1 = 0$, so ist
$$x^n + 1 = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$
Multiplizirt man in unserem Falle je zwei neben einander stehende Werthe von x in den Formeln (4) und (6) des vorigen Paragraphen und bemerkt, dafs
$$\left(x - \cos\frac{2k+1}{n}\pi - i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)\left(x - \cos\frac{2k+1}{n}\pi + i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)$$
$$= \left(x - \cos\frac{2k+1}{n}\pi\right)^2 - \left(i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)^2$$
$$= x^2 - 2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi + 1$$
ist, so erhält man:

Für ein gerades n

(5)
$$x^n + 1$$
$$= \left(x^2 - 2x\cos\frac{1}{n}\pi + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3}{n}\pi + 1\right)\dots$$
$$\dots\left(x^2 - 2x\cos\frac{n-1}{n}\pi + 1\right)$$

und für ein ungerades n

(6)
$$x^n + 1$$
$$= (x + 1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{1}{n}\pi + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3}{n}\pi + 1\right)\dots$$
$$\dots\left(x^2 - 2x\cos\frac{n-2}{n}\pi + 1\right)$$

Setzt man noch $\frac{x}{a}$ an die Stelle von x und multiplizirt beiderseits mit a^n, so ergiebt sich:

Für ein gerades n

$$(7) \quad x^n + a^n$$
$$= \left(x^2 - 2ax\cos\frac{1}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3}{n}\pi + a^2\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2\right)$$

und für ein ungerades n

$$(8) \quad x^n + a^n$$
$$= (x+a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{1}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3}{n}\pi + a^2\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2\right)$$

Die Sätze (3), (4), (7), (8) lassen sich auch geometrisch interpretiren und in dieser Gestalt wurden sie zuerst von Cotes (✝ 1716) aufgestellt.

Theilt man nämlich die Peripherie eines Kreises, von einem Punkte M derselben ausgehend, in $2n$ gleiche Theile und zieht von einem beliebig auf dem Durchmesser MC genommenen Punkte O Gerade nach allen Theilpunkten, so ist das Produkt aller Strahlen gerader Nummer: OM. $OM_2 \,.\, OM_4 \ldots = \overline{CM}^n - \overline{CO}^n$, wenn der Punkt O innerhalb des Kreises und $= \overline{CO}^n - \overline{CM}^n$, wenn er aufserhalb desselben liegt und das Produkt aller Strahlen ungerader Nummern: $OM_1 \,.\, OM_3 \,.\, OM_5 \ldots$ in jedem Falle $= \overline{CO}^n + \overline{CM}^n$.

Wir wollen den Fall, wo der Punkt O aufserhalb des Kreises liegt, zuerst betrachten, weil er sich unmittelbar an die Form der Gleichungen (3), (4), (7), (8) anschliefst.

Für $CO = x$, $CM = a$ ist in Fig. 13:

$$\overline{OM_1}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{M_1P}^2 = (x - a\cos PCM_1)^2 + (a\sin PCM_1)^2$$
$$= x^2 - 2ax\cos PCM_1 + a^2$$

Da aber der Kreis in $2n$ Theile getheilt ist, so haben wir $PCM_1 = \frac{2\pi}{2n} = \frac{1}{n}\pi$, folglich

$$\overline{OM_1}^2 = x^2 - 2ax\cos\frac{1}{n}\pi + a^2$$

Hieraus findet man auch die Werthe von $\overline{OM_2}^2$, $\overline{OM_3}^2$ u. s. f., wenn man statt des Winkels PCM_1 der Reihe nach PCM_2, PCM_3 u. s. f., d. i. $\frac{2}{n}\pi$, $\frac{3}{n}\pi$ etc. an die Stelle von $\frac{1}{n}\pi$ setzt. Es ist überhaupt, wenn OM_k irgend einen der Strahlen bezeichnet,

$$\overline{OM_k}^2 = x^2 - 2ax\cos\frac{k}{n}\pi + a^2.$$

Da aber der Kreis in eine gerade Anzahl von Theilen zerlegt ist, so entspricht jedem nach einem Punkte in der oberen Hälfte gehenden Strahle ein anderer ihm gleicher in der unteren Hälfte; so ist z. B. in unserer Figur, wo $2n = 10$, $OM_1 = OM_9$, $OM_2 = OM_8$, $OM_3 = OM_7$ etc., überhaupt $OM_k = OM_{2n-k}$. Statt $\overline{OM_1}^2$, $\overline{OM_2}^2$ etc. kann man also auch $OM_1 \,.\, OM_9$, $OM_2 \,.\, OM_8$ etc., überhaupt $OM_k \,.\, OM_{2n-k}$ setzen. Mithin wird

$$(1) \qquad OM_k \,.\, OM_{2n-k} = x^2 - 2ax\cos\frac{k}{n}\pi + a^2.$$

Man erhält hieraus noch unter der Bemerkung, dafs $OM = OM_0 = OM_{2n}$ ist, für $k = 0$ $OM_0 = x - a$; für $k = n$ hat man auch $OM_n = x + a$.

I. Setzen wir $k = 0, 2, 4, \ldots n$, wobei n als gerade angenommen wird, so ergiebt sich durch Multiplikation aller entstehenden Gleichungen

$$OM_0 \,.\, OM_2 \,.\, OM_4 \,.\, OM_6 \ldots OM_{n-2} \,.\, OM_n$$
$$= (x-a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4}{n}\pi + a^2\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2\right)(x+a)$$

d. i. weil das erste und letzte Glied $x^2 - a^2$ zum Produkt geben, nach Formel (3)

$$(2) \qquad OM_0 \,.\, OM_2 \,.\, OM_4 \ldots OM_{n-2}\, OM_n = x^n - a^n$$

Wäre n ungerade, so setze man in (1) $k = 0, 2, 4, \ldots n-3, n-1$, so wird

$$OM_0 \,.\, OM_2 \,.\, OM_4 \ldots OM_{n-1}$$
$$= (x-a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4}{n}\pi + a^2\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2\right)$$

also nach Formel (4)

$$OM_0 \,.\, OM_2 \,.\, OM_4 \ldots OM_{n-3} \,.\, OM_{n-1} = x^n - a^n.$$

Es ist mithin immer das Produkt der Strahlen gerader Nummer $= \overline{CO}^n - \overline{CM}^n$.

II. Für ein gerades n setzen wir in (1) $k = 1, 3, 5, \ldots n-1$, dann ist durch Multiplikation aller entstehenden Gleichungen

$$OM_1 \,.\, OM_3 \,.\, OM_5 \ldots OM_{n-3} \,.\, OM_{n-1}$$
$$= \left(x^2 - 2ax \cos\frac{1}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3}{n}\pi + a^2\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2\right)$$
$$= x^n + a^n$$

Für ein ungerades n nehme man $k = 1, 3, 5, \ldots n$, und beachte, dafs $OM_n = x + a$ ist, so wird

$$OM_1 \,.\, OM_3 \,.\, OM_5 \ldots OM_{n-2} \,.\, OM_n$$
$$= \left(x^2 - 2ax\cos\frac{1}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3}{n}\pi + a^2\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2\right)(x + a)$$
$$= x^n + a^n$$

Mithin ist immer das Produkt der Strahlen ungerader Nummer $= \overline{CO}^n + \overline{CM}^n$.

Liegt der Punkt O im Innern des Kreises, so ändert sich blos die Betrachtung in I. Statt dafs nämlich oben $OM = x - a$ war, wird es jetzt $= a - x$. Die Gröfsen $x^2 - 2ax\cos\frac{k}{n}\pi + a^2$ ändern ihre Werthe nicht, und es besteht daher der ganze Unterschied darin, dafs in den Produkten das erste Glied $a - x$ und nicht $x - a$ ist. Diefs reduzirt sich aber leicht auf den obigen Fall, wenn man für $a - x$ setzt $-(x - a)$. Der Werth des Produktes ist dann entsprechend $-(x^n - a^n)$, d. h. $a^n - x^n = \overline{CM}^n - \overline{CO}^n$, wie im Anfang behauptet wurde.

Capitel XIV.
Die Exponenzialgröfsen und Logarithmen mit complexen Variabelen.

§. 56.
Definition der Exponenzialgröfse.

Nachdem wir alle die Beziehungen erörtert haben, welche sich an die Potenz mit complexer Basis knüpfen, müssen wir nun die Potenz mit complexem Exponenten, d. h. die Exponenzialgröfse untersuchen. Die erste Frage ist hier wieder die, welche Bedeutung das Symbol a^{t+ui} haben soll, und wir befinden uns dabei in demselben Falle wie früher; weil nämlich die Definition von a^z schlechterdings nur auf reelle z pafst, so würde es frei stehen, für a^{t+ui} eine ganz neue Erklärung zu geben, die nur der Art sein müfste, dafs sie für $u = 0$ mit der gewöhnlichen Auffassung von a^t zusammenfiele. Um aber möglichste Einheit in den Calcül zu bringen, gehen wir auf die Lehren des §. 8. zurück, denen zufolge die natürliche Exponenzialgröfse e^z mittelst der Formel

$$e^z = Lim\left[\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^\omega\right], \qquad \omega = \infty$$

aus der Potenz abgeleitet werden kann. Demgemäfs möge die Definition der natürlichen Exponenzialgröfse mit complexer Variabelen durch die Gleichung

$$(1) \qquad e^{t+ui} = Lim\left[\left(1+\frac{t+ui}{\omega}\right)^\omega\right], \qquad \omega = \infty$$

gegeben sein, und es ist diese Definition vollkommen sicher, weil der rechter Hand befindliche Ausdruck nur eine Potenz enthält, deren Bedeutung unter allen Umständen nach den Lehren des §. 52. bestimmt werden kann. Um diefs sogleich genauer zu erörtern, sei

$$1+\frac{t+ui}{\omega} = 1+\frac{t}{\omega}+\frac{u}{\omega}i = \varrho\,(\cos\vartheta + i.\sin\vartheta)$$

so findet man

$$(2) \qquad \varrho = \sqrt{\left(1+\frac{t}{\omega}\right)^2+\left(\frac{u}{\omega}\right)^2} = \left[1+\frac{2t}{\omega}+\frac{t^2+u^2}{\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(3) \qquad \tan\vartheta = \frac{\frac{u}{\omega}}{1+\frac{t}{\omega}}$$

und vermöge der so bestimmten Werthe von ϱ und ϑ ist

$$e^{t+ui} = Lim\,[\varrho^{\omega}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^{\omega}]$$

oder

(4) $$e^{t+ui} = Lim\,(\varrho^{\omega})\,.\,Lim\,(\cos\omega\vartheta + i\sin\omega\vartheta).$$

Untersuchen wir nun einzeln die beiden rechter Hand angedeuteten Gränzwerthe. Nach No. (2) ist

$$\varrho^{\omega} = \left[1 + \frac{2t}{\omega} + \frac{t^2+u^2}{\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}\omega}$$

und wenn wir den Ausdruck $\frac{2t}{\omega} + \frac{t^2+u^2}{\omega^2}$ kurz mit δ bezeichnen,

$$\varrho^{\omega} = (1+\delta)^{\frac{1}{2}\omega} = \left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]^{\frac{1}{2}\omega\delta}$$

d. i. vermöge der Bedeutung von δ

$$\varrho^{\omega} = \left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]^{t + \frac{t^2+u^2}{2\omega}}$$

Für unendlich wachsende ω convergirt δ gegen die Null, es ist dann

$$Lim\,(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e \quad \text{und} \quad Lim\,\frac{t^2+u^2}{2\omega} = 0$$

mithin

(5) $$Lim\,(\varrho^{\omega}) = e^t$$

Ferner hat man in Beziehung auf $\omega\vartheta$

$$\omega\vartheta = \frac{\vartheta}{\tan\vartheta}\,.\,\omega\tan\vartheta = \frac{\vartheta}{\tan\vartheta}\,.\,\frac{u}{1+\frac{t}{\omega}}$$

Bei unendlich wachsenden ω nähert sich ϑ, wie man aus No. (3) ersieht, der Gränze Null, man hat daher

$$Lim\,\frac{\vartheta}{\tan\vartheta} = 1 \quad \text{und} \quad Lim\,\frac{u}{1+\frac{t}{\omega}} = u$$

folglich

(6) $$Lim\,(\omega\vartheta) = u$$

Benutzen wir die Gleichungen (5) und (6) zur Transformation von No. (4), so lautet jetzt die Definition der natürlichen Exponenzialgröfse mit complexer Variabelen

(7) $$e^{t+ui} = e^t(\cos u + i\sin u)$$

Für $t = 0$ reduzirt sich diese Gleichung auf

(8) $$e^{ui} = \cos u + i\sin u$$

übereinstimmend mit Dem, was wir durch Vergleichung der Exponenzialreihe mit der Cosinus- und Sinusreihe gefunden haben. Die obige von der Theorie der Reihen unabhängige Herleitung desselben Satzes zeigt seine eigentliche Bedeutung, welche sehr einfach darin besteht, dafs er

ein Spezialfall der naturgemäfsen Definition von e^{t+ui} ist. — Es verdient übrigens noch bemerkt zu werden, dafs der Ausdruck (8) zugleich den Ablenkungsfaktor $(-1)^{\frac{u}{\pi}}$ darstellt, den wir in §. 50. kennen gelernt haben; es ist nämlich

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

folglich unter Anwendung des Moivre'schen Theoremes und der Formel (8)

$$(-1)^{\frac{u}{\pi}} = \cos u + i\sin u = e^{ui}$$

An diese Bemerkung lassen sich unter Anderen verschiedene Untersuchungen der ebenen Geometrie anknüpfen, auf die wir hier aber nicht eingehen können.

Aus der Definition in No. (7) erkennt man leicht, dafs die in der Formel

$$e^{z} \,.\, e^{z'} = e^{z+z'}$$

ausgesprochene Eigenschaft der Exponenzialgröfse auch für complexe Variabele gültig bleibt; man hat nämlich

$$e^{t+ui} \,.\, e^{t'+u'i} = e^{t}(\cos u + i\sin u) \,.\, e^{t'}(\cos u' + i\sin u')$$

und nach dem Theoreme von Moivre

$$= e^{t+t'}[\cos(u+u') + i\sin(u+u')]$$
$$= e^{(t+t')+(u+u')i}$$

indem man die Gleichung (7) rückwärts für $t+t'$ und $u+u'$ statt t und u in Anspruch nimmt.

So wie durch die Gleichung (1) die Definition von e^{t+ui} gegeben ist, so würde entsprechend

$$e^{kt+kui} = Lim\left[\left(1 + \frac{kt+kui}{\omega}\right)^{\omega}\right], \qquad \omega = \infty$$

sein, wobei k eine constante reelle Zahl bezeichnen möge. Behandelt man den rechter Hand stehenden Ausdruck ebenso wie vorhin, so tritt kt an die Stelle von t und ku an die von u; diefs giebt

$$(9) \qquad e^{kt+kui} = e^{kt}\left\{\cos(ku) + i\sin(ku)\right\}$$
$$= \left\{e^{t}[\cos u + i\sin u]\right\}^{k}$$
$$= (e^{t+ui})^{k}$$

d. i. bei umgekehrter Schreibweise

$$(10) \qquad (e^{t+ui})^{k} = e^{(t+ui)k}$$

woraus man erkennt, dafs die bekannte Eigenschaft der Exponenzialgröfse $(e^{z})^{k} = e^{zk}$ auch für complexe z besteht.

Durch das Vorige erledigt sich die Theorie der natürlichen Exponenzialgröfse mit complexer Variabelen, und es bedarf daher noch einer

Untersuchung über die Exponenzialgröfse mit beliebiger Basis. Nun ist aber für reelle z

$$a^z = e^{z\,la} = Lim\left[\left(1 + \frac{z\,la}{\omega}\right)^\omega\right], \qquad \omega = \infty$$

und demgemäfs verstehen wir unter a^{t+ui} den Ausdruck

$$Lim\left[1 + \frac{(t+ui)\,la}{\omega}\right]^\omega$$

oder zufolge von No. (9) für $k = la$

(11) $$a^{t+ui} = a^t\,[cos\,(u\,la) + i\,sin\,(u\,la)]$$

Vermöge dieser Definition wird man sich auf ähnliche Weise wie vorhin sehr leicht überzeugen, dafs die Eigenschaften

$$a^z \,.\, a^{z'} = a^{z+z'} \quad \text{und} \quad (a^z)^k = a^{zk}$$

auch für complexe z ihre Geltung behalten.

§. 57.

Anwendungen der vorigen Sätze.

Bezeichnen wir zur Abkürzung e^{ui} mit p und e^{-ui} mit q, so ist

(1) $$p = cos\,u + i\,sin\,u, \qquad q = cos\,u - i\,sin\,u$$

oder auch durch Addition und Subtraktion

(2) $$2\,cos\,u = p + q, \qquad 2i\,sin\,u = p - q.$$

Ferner ist nach No. (1)

(3) $$pq = cos^2 u + sin^2 u = 1$$

und

(4) $$p^\mu + q^\mu = 2\,cos\,\mu u, \qquad p^\mu - q^\mu = 2i\,sin\,\mu u.$$

Mit diesen Gleichungen läfst sich auf folgende Weise operiren.

I. Durch Potenzirung der Gleichung $2\,cos\,u = p + q$ ergiebt sich, wenn n eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnet:

$$(2\,cos\,u)^{2n} = (2n)_0\,p^{2n} + (2n)_1\,p^{2n-1}\,q + (2n)_2\,p^{2n-2}\,q^2 + \dots$$
$$\dots + (2n)_{2n-2}\,p^2 q^{2n-2} + (2n)_{n-1}\,pq^{2n-1} + (2n)_n\,q^{2n}$$

Die Gliederanzahl rechter Hand ist $2n + 1$ und das mittelste Glied

$$(2n)_n\,p^n q^n;$$

aufserdem kommt jeder Binomialcoefficient zweimal vor, weil $(2n)_0 = (2n)_n$, $(2n)_1 = (2n)_{2n-1}$ u. s. f.; vereinigen wir nun die von Anfang und Ende gleich weit entfernten Glieder, so ist auch

$$(2\,cos\,u)^{2n} = (2n)_0\,(p^{2n} + q^{2n}) + (2n)_1\,(p^{2n-2} + q^{2n-2})\,(pq)$$
$$+ (2n)_2\,(p^{2n-4} + q^{2n-4})\,(pq)^2 + \dots\dots\dots$$
$$+ (2n)_{n-1}\,(p^2 + q^2)\,(pq)^{n-1} + (2n)_n\,(pq)^n$$

Unter Rücksicht auf die Gleichungen (3) und (4) ergiebt sich durch nachherige Division mit 2

(5)
$$2^{2n-1} \cos^{2n} u$$
$$= (2n)_0 \cos 2nu + (2n)_1 \cos(2n-2)u + (2n)_2 \cos(2n-4)u$$
$$+ \dots + (2n)_{n-1} \cos 2u + \frac{1}{2}(2n)_n.$$

Auf ganz gleiche Weise läfst sich ein ähnliches Resultat ableiten, indem man die Gleichung $2\cos u = p + q$ auf die $(2n+1)$te Potenz erhebt. Die Gliederanzahl rechter Hand ist dann $2n+2$, jedes Glied kommt zweimal vor und man findet so:

(6)
$$2^{2n} \cos^{2n+1} u =$$
$$(2n+1)_0 \cos(2n+1)u + (2n+1)_1 \cos(2n-1)u + (2n+1)_2 \cos(2n-3)u + \dots$$
$$\dots + (2n+1)_{n-1} \cos 3u + (2n+1)_n \cos u.$$

So hat man z. B. nach den Formeln (5) und (6)

$$2^1 \cos^2 u = \cos 2u + 1$$
$$2^2 \cos^3 u = \cos 3u + 3 \cos u$$
$$2^3 \cos^4 u = \cos 4u + 4 \cos 2u + 3$$
$$2^4 \cos^5 u = \cos 5u + 5 \cos 3u + 10 \cos u$$
$$2^5 \cos^6 u = \cos 6u + 6 \cos 4u + 15 \cos 2u + 10$$

u. s. w.

II. Die Gleichung $2i \sin u = p - q$ gestattet eine völlig ähnliche Behandlung, indem man auf die Formeln (3) und (4), wie vorhin, *Rücksicht* nimmt und $i^{2n} = (-1)^n$, $i^{2n+1} = (-1)^n i$ setzt. Durck Erhebung auf die Potenz $2n$ findet man so:

(7)
$$(-1)^n \sin^{2n} u$$
$$= (2n)_0 \cos 2nu - (2n)_1 \cos(2n-2)u + (2n)_2 \cos(2n-4)u - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1} (2n)_{n-1} \cos 2u + (-1)^n \frac{1}{2}(2n)_n$$

und durch Erhebung auf die $(2n+1)$te Potenz:

(8)
$$(-1)^n 2^{2n} \sin^{2n+1} u =$$
$$(2n+1)_0 \sin(2n+1)u - (2n+1)_1 \sin(2n-1)u + (2n+1)_2 \sin(2n-3)u - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1} (2n+1)_{n-1} \sin 3u + (-1)^n (2n+1)_n \sin u.$$

Nach diesen Formeln ist z. B. für $n = 1, 2, 3$

$$-2^1 \sin^2 u = \cos 2u - 1$$
$$-2^2 \sin^3 u = \sin 3u - 3 \sin u$$
$$+2^3 \sin^4 u = \cos 4u - 4 \cos 2u + 3$$
$$+2^4 \sin^5 u = \sin 5u - 5 \sin 3u + 10 \sin u$$
$$-2^5 \sin^6 u = \cos 6u - 6 \cos 4u + 15 \cos 2u - 10$$
$$-2^6 \sin^7 u = \sin 7u - 7 \sin 5u + 21 \sin 3u - 35 \sin u$$

u. s. w.

§. 58.
Die complexen Logarithmen.

Nach der gewöhnlichen Definition des Logarithmus heifst z der Logarithme von Z, wenn die Gleichung

$$a^z = Z$$

statt findet; behalten wir diese Definition für complexe Variabele bei, so ist

(1) $$t + ui = {}^a log\,(x + yi)$$

wenn umgekehrt die Beziehung gilt:

(2) $$a^{t+ui} = x + yi$$

Aus dieser Definition des Logarithmus einer complexen Zahl geht unmittelbar hervor, dafs alle Eigenschaften der Logarithmen bei complexen Zahlen ebenso wie bei reellen Zahlen gelten; so hat man z. B.

(3) $$t' + u'i = {}^a log\,(x' + y'i)$$

wenn

(4) $$a^{t'+u'i} = x' + y'i$$

Durch Addition der Gleichungen (1) und (3) ist aber

$$(t + t') + (u + u')\,i = {}^a log\,(x + yi) + {}^a log\,(x' + y'i)$$

ferner durch Multiplikation der Gleichungen (2) und (4)

$$a^{(t+t')+(u+u')i} = (x + yi)\ (x' + y'i)$$

mithin

$$(t + t') + (u + u')\,i = {}^a log\,[(x + yi)\ (x' + y'i)]$$

und wenn man diefs mit dem Vorhergehenden zusammenhält, so erkennt man leicht, dafs die in der Gleichung $log\,z + log\,z' = log\,(zz')$ ausgesprochene Eigenschaft des Logarithmus auch für die complexen Variabelen $z = x + yi$ und $z' = x' + y'i$ ihre Gültigkeit behält. Auf ganz gleiche Weise würde man sich von dem Bestehen der übrigen Eigenschaften des Logarithmus überzeugen.

Diese Bemerkung ist defswegen von Vortheil, weil sie uns der Mühe überhebt, Logarithmen künstlicher Systeme zu betrachten, indem nun auch bei complexen Zahlen die Regel gilt:

(5) $${}^a log\,(x + yi) = M_a\,.\ l(x + yi).$$

Um nun weiter $l(x + yi)$ zu untersuchen, ist es nur nöthig, den reellen Theil x als eine positive Gröfse zu betrachten; denn man hat

$$x + yi = (+1)\ (x + yi)$$
$$-x + yi = (-1)\ (x - yi)$$

folglich nach der früheren Bemerkung über die Gültigkeit der Formel $log\,z + log\,z' = log\,(zz')$

(6) $$l(x+yi) = l(+1) + l(x+yi)$$
(7) $$l(-x+yi) = l(-1) + l(x-yi)$$
und man erkennt hieraus, dafs es auf drei Dinge ankommt, auf $l(+1)$, auf $l(-1)$ und auf $l(x \pm yi)$, wo x jederzeit positiv ist.

Man hat nun, wenn n eine ganze positive Zahl bezeichnet,
$$e^{\pm 2n\pi i} = \cos 2n\pi \pm i \sin 2n\pi = +1$$
mithin umgekehrt zufolge der Definition des Logarithmus
(8) $$l(+1) = \pm 2n\pi i$$
d. h. der Logarithmus der positiven Einheit besitzt unendlich viele Werthe, unter denen sich nur ein reeller befindet, nämlich $l(+1) = 0$, der dem Falle $n = 0$ entspricht.

Was zweitens $l(-1)$ anbelangt, so ist
$$e^{\pm(2n+1)\pi i} = \cos(2n+1)\pi \pm i \sin(2n+1)\pi = -1$$
mithin umgekehrt
(9) $$l(-1) = \pm(2n+1)\pi i$$
d. h. der Logarithmus der negativen Einheit besitzt unendlich viele Werthe, von denen keiner reell ist.

Um noch den natürlichen Logarithmus von $x \pm yi$ zu finden, braucht man nur
$$x \pm yi = \varrho(\cos\theta \pm i \sin\theta)$$
zu setzen, es wird dann
$$l(x \pm yi) = l\varrho + l(\cos\theta \pm i \sin\theta)$$
$$= l\varrho + l(e^{\pm\theta i}) = l\varrho \pm \theta i$$
oder wenn statt ϱ sein Werth $\sqrt{x^2+y^2}$ und statt θ gesetzt wird $Arctan\,\frac{y}{x}$, so ist
(10) $$l(x \pm yi) = \frac{1}{2}\,l(x^2+y^2) \pm i\,Arctan\,\frac{y}{x}.$$
Aus den Gleichungen (6) und (7) wird nun vermöge der Formeln (8), (9) und (10)
(11) $$l(x+yi) = \frac{1}{2}\,l(x^2+y^2) + i\,Arctan\,\frac{y}{x} \pm 2n\pi i$$
(12) $$l(-x+yi) = \frac{1}{2}\,l(x^2+y^2) - i\,Arctan\,\frac{y}{x} \pm (2n+1)\pi i$$
Die erste Formel giebt für $n = 0$, d. h. wenn man von den unendlich vielen Werthen des $l(+1)$ nur den reellen Werth Null beibehält,
(13) $$l(x+yi) = \frac{1}{2}\,l(x^2+y^2) + i\,Arctan\,\frac{y}{x}$$
wobei x als positiv vorausgesetzt wird. Spezieller hat man für $x = 1$, $y = z$ und $y = -z$

$$l(1+zi) = \frac{1}{2}\,l(1+z^2) + i\,Arctan\,z$$

$$l(1-zi) = \frac{1}{2}\,l(1+z^2) - i\,Arctan\,z$$

folglich durch Subtraktion und Division mit $2i$

(14) $$\frac{1}{2i}\,l\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right) = Arctan\,z$$

Diefs bestätigt sich auch durch die Reihe, welche für $Arctan\,z$ früher entwickelt wurde; setzt man nämlich in der Formel

$$\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = \frac{1}{1}u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + \ldots$$

zi für u und dividirt mit $2i$ beiderseits, so erhält man rechter Hand die Reihe für $Arctan\,z$.

Capitel XV.

Die goniometrischen und cyklometrischen Funktionen mit complexen Variabelen.

§. 59.

Die goniometrischen Funktionen.

Wir können allgemein für jedes x die Gleichungen

(1) $$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

(2) $$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

als Definitionen von $\cos x$ und $\sin x$ ansehen, weil sie uns zu den nämlichen Reihen verhelfen, welche wir aus der goniometrischen Bedeutung jener Funktionen abgeleitet haben. Demnach ist, wenn man xi für x setzt,

(3) $$\cos(xi) = \frac{e^{-x} + e^{+x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(4) $$\sin(xi) = \frac{e^{-x} - e^{+x}}{2i} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,i$$

und diefs bewährt sich auch, sobald man in den Reihen für den Cosinus und Sinus xi an die Stelle von x setzt und sie dann mit den Reihen vergleicht, die man erhält, wenn man die für e^x und e^{-x} in (3) und (4) angedeuteten Operationen mit den gleichgeltenden Reihen vornimmt.

Ebenso erhält man allgemeiner aus (1) und (2)

$$\cos(\alpha+\beta i) = \frac{e^{(\alpha+\beta i)i} + e^{-(\alpha+\beta i)i}}{2} = \frac{e^{\alpha i-\beta} + e^{-\alpha i+\beta}}{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta i) = \frac{e^{(\alpha+\beta i)i} - e^{-(\alpha+\beta i)i}}{2i} = \frac{e^{\alpha i-\beta} - e^{-\alpha i+\beta}}{2i}$$

Nun ist aber

$$\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \cdot \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2} - \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \cdot \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i} i$$
$$= \frac{e^{\alpha i-\beta} + e^{-\alpha i+\beta}}{2}$$

wovon man sich durch gewöhnliche Multiplikation leicht überzeugen kann; folglich haben wir auch

$$\cos(\alpha+\beta i)$$
$$= \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \cdot \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2} - \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \cdot \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i} i$$

d. i. nach (1) und (2) für $x = \alpha$

(5) $$\cos(\alpha+\beta i) = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \cos\alpha - i\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \sin\alpha.$$

Ähnlich hat man:

$$e^{\alpha i-\beta} - e^{-\alpha i+\beta}$$
$$= \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \cdot \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i} + \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \cdot \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2} i$$

folglich ist auch

$$\sin(\alpha+\beta i)$$
$$= \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \cdot \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2} + \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \cdot \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2} i$$

oder

(6) $$\sin(\alpha+\beta i) = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \sin\alpha + i\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \cos\alpha.$$

Benutzt man die Gleichungen (3) und (4) für $x = \beta$, so ist auch

$$\cos(\alpha+\beta i) = \cos(\beta i)\cos\alpha - \sin(\beta i)\sin\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta i) = \cos(\beta i)\sin\alpha + \sin(\beta i)\cos\alpha$$

woraus man sieht, dafs die Formeln

$$\cos(x+y) = \cos y\cos x - \sin y\sin x$$
$$\sin(x+y) = \cos y\sin x + \sin y\cos x$$

auch dann noch gelten, wenn man complexe Binome für $x + y$ setzt. Da diese Formeln die Quelle aller Relationen unter den goniometrischen Funktionen sind, so folgt jetzt, dafs alle goniometrischen Formeln auch für imaginäre Werthe der Veränderlichen gebraucht werden können,

wenn man statt $\cos(xi)$ und $\sin(xi)$ die Ausdrücke in (3) und (4) substituirt. So erhält man z. B. aus der Formel

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

wenn man statt x die complexe Zahl $\alpha + \beta i$ setzt,

$$(7) \qquad \tan(\alpha + \beta i) = \frac{(e^\beta + e^{-\beta}) \sin \alpha + i(e^\beta - e^{-\beta}) \cos \alpha}{(e^\beta + e^{-\beta}) \cos \alpha - i(e^\beta - e^{-\beta}) \sin \alpha}$$

Auch zusammengesetztere Funktionen lassen sich jetzt reduziren. So kann man z. B.

$$l \sin(u + vi)$$

reduziren, wenn man in Formel (13) des vorigen Paragraphen

$$x = \frac{e^v + e^{-v}}{2} \sin u, \quad y = \frac{e^v - e^{-v}}{2} \cos u$$

setzt, woraus man findet

$$x^2 + y^2 = \frac{e^{2v} + e^{-2v}}{4} - \frac{\cos 2u}{2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} \cot u$$

folglich

$$(8) \qquad l \sin(u + vi)$$

$$= \frac{1}{2} l\left(\frac{e^{2v} + e^{-2v}}{4} - \frac{\cos 2u}{2}\right) + i \, Arctan\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} \cot u\right)$$

und auf ähnliche Weise würde man auch $l \cos(u + vi)$, $l \tan(u + vi)$ etc. reduziren können.

§. 60.

Die cyklometrischen Funktionen.

Da wir gesehen haben, dafs der Sinus und Cosinus eines complexen Bogens Gröfsen von der Form $A + Bi$ sind, so können wir auch umgekehrt fragen, unter welcher Form ein Bogen erscheinen wird, dessen Sinus oder Cosinus unter der genannten Form gegeben ist.

I. Sei zuerst $\alpha + \beta i$ der Sinus eines unbekannten Bogens $u + vi$, so haben wir

$$(1) \qquad Arcsin(\alpha + \beta i) = u + vi$$

oder

$$\alpha + \beta i = \sin(u + vi)$$

d. i.

$$\alpha + \beta i$$

$$= \frac{e^v + e^{-v}}{2} \sin u + i \frac{e^v - e^{-v}}{e} \cos u.$$

Vergleichen wir hier die reellen und imaginären Theile beiderseits, so erhalten wir zwei Gleichungen, aus denen wir u und v zu bestimmen haben. Diefs geschieht auf folgende Weise. Es folgt aus der genannten Vergleichung

$$\frac{e^v + e^{-v}}{2} = \frac{\alpha}{\sin u}, \quad \frac{e^v - e^{-v}}{2} = \frac{\beta}{\cos u}$$

und hieraus durch Addition und Subtraktion

$$(2) \qquad e^v = \frac{\alpha}{\sin u} + \frac{\beta}{\cos u}, \quad e^{-v} = \frac{\alpha}{\sin u} - \frac{\beta}{\cos u}$$

und durch Multiplikation beider Gleichungen:

$$1 = \frac{\alpha^2}{\sin^2 u} - \frac{\beta^2}{\cos^2 u}$$

oder

$$(3) \qquad \sin^2 u \cos^2 u = \alpha^2 \cos^2 u - \beta^2 \sin^2 u$$

woraus sich u finden läfst. Setzt man $1 - \sin^2 u$ für $\cos^2 u$, so ergiebt sich

$$\sin^4 u - (1 + \alpha^2 + \beta^2) \sin^2 u = -\alpha^2$$

folglich

$$\sin^2 u = \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2}$$

Hier läfst sich aber das Vorzeichen nicht unmittelbar bestimmen; wir schlagen daher folgenden Weg ein. Setzt man in (3) $1 - \cos^2 u$ für $\sin^2 u$, so findet sich

$$\cos^4 u - (1 - \alpha^2 - \beta^2) \cos^2 u = \beta^2$$

und folglich

$$\cos^2 u = \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2}$$

Hier läfst sich das Vorzeichen durch die einfache Bemerkung bestimmen, dafs $\cos^2 u$ eine positive Gröfse sein mufs. Wir dürfen defshalb nur das obere Zeichen nehmen, weil wir sonst das Gröfsere vom Kleineren abziehen, mithin $\cos^2 u$ negativ erhalten würden. Es ist also

$$(4) \qquad \cos^2 u = \frac{1}{2}\left[1 - \alpha^2 - \beta^2 + \sqrt{(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2}\right]$$

Hieraus folgt

$$\sin^2 u = \frac{1}{2}\left[1 + \alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{(1 - \alpha^2 - \beta^2) + 4\beta^2}\right]$$

oder weil

$$(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2 = (1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2$$

ist,

$$(5) \qquad \sin^2 u = \frac{1}{2}\left[1 + \alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2}\right]$$

so dafs also in dem früheren Ausdrucke von $\sin^2 u$ das untere Zeichen zu nehmen ist. Es wird jetzt

(6) $$\sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2-\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2}}$$

(7) $$\cos u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2+\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)^2+4\beta^2}}$$

Ausdrücke, die wir mit A und B bezeichnen wollen. Wir haben nun aus $\sin u = A$, $u = Arcsin\, A + 2k\pi$, wo k jede ganze positive Zahl bedeuten kann, womit der Werth von u gefunden ist. Um noch den von v zu bestimmen, halten wir uns an die Gleichung (2), aus welcher folgt

$$v = l\left(\frac{\alpha}{\sin u}+\frac{\beta}{\cos u}\right) = l\left(\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}\right)$$

Mithin haben wir jetzt

(8) $$Arcsin\,(\alpha+\beta i) = 2k\pi + Arcsin\, A + l\left(\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}\right) i$$

worin für A und B die Ausdrücke in (6) und (7) zu setzen sind. Wir haben aber früher unter $Arcsin\, x$ immer den kleinsten aller zum Sinus x gehörigen Bogen verstanden, d. h. vorausgesetzt, dafs für $x = 0$ auch $Arcsin\, x = 0$ werde; wollen wir dieser Bezeichnungsweise für $x = \alpha + \beta i$ treu bleiben, so müssen wir $k = 0$ nehmen und erhalten

(9) $$Arcsin\,(\alpha+\beta i) = Arcsin\, A + l\left(\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}\right) i.$$

II. Es sei ferner in der Gleichung

(10) $$Arccos\,(\alpha+\beta i) = u + vi$$

die Abhängigkeit des u und v von α und β aufzusuchen. Es folgt aus der obigen Gleichung

$$\begin{aligned}\alpha+\beta i &= \cos\,(u+vi)\\ &= \frac{e^v+e^{-v}}{2}\cos u - i\,\frac{e^v-e^{-v}}{2}\sin u\end{aligned}$$

woraus sich durch Vergleichung der reellen und imaginären Theile die Gleichungen

$$\frac{e^v+e^{-v}}{2} = \frac{\alpha}{\cos u},\quad \frac{e^v-e^{-v}}{2} = -\frac{\beta}{\sin u}$$

ergeben, die man durch Addition und Subtraktion combinirt; es giebt diefs

(11) $$e^v = \frac{\alpha}{\cos u}-\frac{\beta}{\sin u},\quad e^{-v} = \frac{\alpha}{\cos u}+\frac{\beta}{\sin u}$$

und durch Multiplikation

$$1 = \frac{\alpha^2}{\cos^2 u}-\frac{\beta^2}{\sin^2 u}$$

oder

$$\sin^4 u - (1 - \alpha^2 - \beta^2) \sin^2 u = \beta^2$$

Hieraus erhält man, unter der Bemerkung, dafs $\sin^2 u$ immer positiv ist,

$$\sin^2 u = \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2}$$

und weil

$$(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2 = (1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2$$

ist,

$$\cos^2 u = \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2}$$

Es folgt nun

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2}}$$

$$\sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2 + \sqrt{(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2}}$$

d. i. $\cos u = A$, $\sin u = B$, wobei A und B die nämliche Bedeutung wie früher haben. Es ist nun $u = Arccos\, A + 2k\pi$ und nach (11)

$$v = l\left(\frac{\alpha}{\cos u} - \frac{\beta}{\sin u}\right) = l\left(\frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B}\right)$$

folglich nach (10)

$$Arccos\,(\alpha + \beta i) = 2k\pi + Arccos\, A + i\, l\left(\frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B}\right)$$

oder wenn wir unter $Arccos\,(\alpha + \beta i)$ den kleinsten aller zugehörigen Bogen verstehen,

$$(12) \qquad Arccos\,(\alpha + \beta i) = Arccos\, A + i\, l\left(\frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B}\right)$$

III. Wir wollen uns nun mit einigen speziellen Fällen der gefundenen Formeln (9) und (12) beschäftigen.

Für $\beta = 0$ wird in (9)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \alpha^2 - \sqrt{(1 - \alpha^2)^2}}$$

Ist hier $\alpha < 1$, so hat man $\sqrt{(1 - \alpha^2)^2} = 1 - \alpha^2$ zu setzen, und in diesem Falle wird $A = \alpha$; ist aber $\alpha > 1$, so mufs

$$\sqrt{(1 - \alpha^2)^2} = \sqrt{(\alpha^2 - 1)^2} = \alpha^2 - 1$$

genommen werden und dann wird $A = 1$. Ferner wird im ersten Falle $B = \sqrt{1 - \alpha^2}$, folglich $\frac{\beta}{B} = 0$, im zweiten aber $B = 0$, folglich $\frac{\beta}{B} = \frac{0}{0}$. Um hier den wahren Werth zu erfahren, gehen wir folgenden Weg. Es ist

$$\frac{\beta^2}{B^2} = \frac{2\beta^2}{\sqrt{(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2} + 1 - \alpha^2 - \beta^2}$$

folglich, wenn man Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)^2+4\beta^2}-(1-\alpha^2-\beta^2)$$

multiplizirt und bemerkt, dafs immer $(\sqrt{p}+q)(\sqrt{p}-q)=p-q^2$ ist,

$$\frac{\beta^2}{B^2}=\frac{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)^2+4\beta^2}+(1+\alpha^2-\beta^2)}{2}$$

folglich für $\beta=0$, weil $\alpha>1$ ist,

$$\frac{\beta^2}{B^2}=\frac{\alpha^2-1-(1-\alpha^2)}{2}=\alpha^2-1$$

und

$$\frac{\beta}{B}=\sqrt{\alpha^2-1}$$

Wir haben also nach allem Bisherigen für $\alpha<1$ und $\beta=0$

$$A=\alpha,\quad \frac{\alpha}{A}=1,\quad \frac{\beta}{B}=0$$

und für $\alpha>1$

$$A=1,\quad \frac{\alpha}{A}=\alpha,\quad \frac{\beta}{B}=\sqrt{\alpha^2-1}$$

Für $\alpha<1$ reduzirt sich daher die Gleichung (9) auf die Identität $Arcsin\,\alpha = Arcsin\,\alpha$; für $\alpha>1$ dagegen wird:

$$Arcsin\,\alpha = Arcsin\,1 + i\,l(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})$$

oder

(13) $$Arcsin\,\alpha = \frac{\pi}{2}+i\,l(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})$$

Diefs Resultat darf nicht befremden, wenn man bemerkt, dafs alle Sinus ächte Brüche sind, dafs also einem Sinus >1 kein reeller Kreisbogen entsprechen kann.

Aus der Gleichung (12) erhält man für $\beta=0$, unter der Voraussetzung $\alpha>1$,

(14) $$Arccos\,\alpha = i\,l(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})$$

Durch Addition von (13) und (14) ergiebt sich noch

(15) $$Arcsin\,\alpha + Arccos\,\alpha = \frac{\pi}{2}$$

so dafs also die Relation $Arcsin\,x + Arccos\,x = \frac{\pi}{2}$ auch für $x>1$ gilt.

Nimmt man $\alpha=0$ in Formel (9), so wird $B=1$, $A=0$, mithin der Ausdruck $\frac{\alpha}{A}=\frac{0}{0}$. Seinen Werth erfährt man auf folgende Weise. Es ist

$$\frac{\alpha^2}{A^2}=\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2+\beta^2-\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2}}$$

Multiplizirt man Zähler und Nenner mit

$$1 + \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2}$$

so wird

$$\frac{\alpha^2}{A^2} = \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2}}{2}$$

folglich für $\alpha = 0$

$$\frac{\alpha^2}{A^2} = 1 + \beta^2 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{A} = \sqrt{1 + \beta^2}.$$

Es ist also, weil $B = 1$, $A = 0$ war,

$$(16) \qquad Arcsin\,(\beta i) = i\,l(\sqrt{1 + \beta^2} + \beta)$$

oder

$$(17) \qquad \frac{Arcsin\,(\beta i)}{i} = l(\sqrt{1 + \beta^2} + \beta)$$

wobei das Imaginäre links nur scheinbar ist. Setzt man auch in Formel (12) $\alpha = 0$, so wird

$$(18) \qquad Arccos\,(\beta i) = \frac{\pi}{2} + i\,l(\sqrt{1 + \beta^2} - \beta)$$

und

$$(19) \qquad \left[\frac{\pi}{2} - Arccos\,(\beta i)\right] i = l(\sqrt{1 + \beta^2} - \beta)$$

Addirt man die Gleichungen (16) und (18), so findet sich

$$(20) \qquad Arcsin\,(\beta i) + Arccos\,(\beta i) = \frac{\pi}{2}$$

d. h. die Relation $Arcsin\,x + Arccos\,x = \frac{\pi}{2}$ gilt auch für imaginäre Sinus.

Setzt man in Formel (13) $\alpha = \sqrt{1 + \beta^2}$, so wird

$$Arcsin\,\sqrt{1 + \beta^2} = \frac{\pi}{2} + i\,l(\sqrt{1 + \beta^2} + \beta)$$

und mit Hülfe der Gleichung (16)

$$(21) \qquad Arcsin\,\sqrt{1 + \beta^2} = \frac{\pi}{2} + Arcsin\,(\beta i)$$

Diese Formel entspricht ganz einer schon bekannten. Für $y = 1$ geht nämlich die Relation

$$Arcsin\,(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}) = Arcsin\,y + Arcsin\,x$$

in

$$Arcsin\,\sqrt{1 - x^2} = \frac{\pi}{2} + Arcsin\,x$$

über. Die Gleichung (21) zeigt, daſs dieselbe auch für imaginäre x gilt; denn wenn man $x = \beta i$ setzt, so erhält man dieselbe aus der vorstehenden.

Capitel XVI.
Die complexen Reihen.

§. 61.
Grundbegriffe.

Auf gleiche Weise, wie wir den Begriff der Funktion in so fern erweitert haben, als wir uns nicht mehr auf reelle Variabele beschränken, ist auch der Begriff der Reihe einer Erweiterung fähig, indem an die Stelle der früheren reellen Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

eine Reihe complexer Zahlen gesetzt werden kann. Ist diese complexe Reihe eine endliche:

$$(v_0 + w_0 i) + (v_1 + w_1 i) + (v_2 + w_2 i) + \dots + (v_{n-1} + w_{n-1} i)$$

so hat die Betrachtung derselben keine Schwierigkeit, da die endliche Reihe als Summe einer endlichen Anzahl Summanden erscheint und demgemäfs auch unter der Form

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$$
$$+ (w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1})\, i$$

dargestellt werden kann. Geht aber die Reihe ins Unendliche fort, so entsteht, wie früher, die Frage nach ihrer Convergenz oder Divergenz, wobei es jedoch vorher einer Verständigung darüber bedarf, was Convergenz oder Divergenz einer complexen Reihe heifsen soll. Hierüber zu entscheiden, ist nicht schwer, wenn man sich erinnert, dafs nur convergente reelle Reihen einer bestimmten reellen Zahl gleich gesetzt werden dürfen, welche letztere dann die Summe der Reihe ist; behalten wir diese Definition ungeändert bei, so heifst die complexe Reihe

$$(v_0 + w_0 i) + (v_1 + w_1 i) + (v_2 + w_2 i) + \dots$$

convergent, wenn sich eine bestimmte complexe Zahl $V + Wi$ finden läfst, welcher die obige Reihe gleichgesetzt werden darf; daraus würde aber folgen

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots = V$$
$$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \dots = W$$

und hier müssen nun die einzelnen reellen Reihen convergiren, weil sie aufserdem keine bestimmten Summen V und W haben würden. Man kann demnach die Definition der Convergenz einer complexen Reihe auch folgendermafsen ausdrücken:

Die complexe unendliche Reihe

$$(v_0 + w_0 i) + (v_1 + w_1 i) + (v_2 + w_2 i) + \cdots$$

heifst convergent, wenn die reellen Reihen

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$
$$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

gleichzeitig convergiren, divergent dagegen, sobald die eine oder andere der genannten reellen Reihen divergirt oder beide divergiren. Dieser Definition zufolge reduzirt sich die Untersuchung der Convergenz oder Divergenz unendlicher complexer Reihen auf die Prüfung zweier reellen Reihen und kann demnach unter Zuziehung von Cap. VII. jederzeit durchgeführt werden. Setzen wir z. B. voraus, es sei eine reelle Reihe von der Form

(1) $$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots$$

dadurch in eine complexe Reihe übergegangen, dafs $z(\cos\theta + i\sin\theta)$ an die Stelle von z getreten ist, so hat man die complexe Reihe:

(2) $$A_0 + A_1 z(\cos\theta + i\sin\theta) + A_2 z^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + A_3 z^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) + \cdots$$

und als reelle Reihen daraus

$$A_0 + A_1 z\cos\theta + A_2 z^2\cos 2\theta + A_3 z^3 \cos 3\theta + \cdots$$
$$A_1 z\sin\theta + A_2 z^2 \sin 2\theta + A_3 z^3 \sin 3\theta + \cdots$$

die letzteren convergiren nun, wie sehr leicht zu sehen, jedesmal, wenn diefs mit der Reihe (1) der Fall ist, und man kann daher sagen: die complexe Reihe (2) convergirt immer unter denselben Bedingungen, unter welchen die reelle Reihe (1) convergent bleibt. So z. B. convergirt die reelle Reihe

$$\frac{1}{1}z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \cdots$$

für $1 > z > -1$; dasselbe gilt auch von der complexen Reihe

(3) $$\frac{1}{1}z(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{2}z^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \frac{1}{3}z^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) + \cdots$$

für $z = 1$ divergirt die obige Reihe; die complexe Reihe bedarf dann einer besonderen Untersuchung, und zwar findet man aus §. 33. II., dafs sie noch convergirt, wenn θ kein gerades Vielfaches von π ausmacht; für $z > 1$ oder $z < -1$ divergirt die reelle Reihe und ebenso die complexe. Mit diesen einfachen Bemerkungen ist für alle Fälle die Entscheidung gegeben.

Was ferner die Rechnungen mit unendlichen complexen Reihen betrifft, so wird man sich leicht überzeugen, dafs sie ganz denselben Regeln

unterliegen wie die Behandlung der reellen Reihen, und zwar folgt diefs aus der Bemerkung, dafs jede complexe Reihe als Complex zweier reellen Reihen angesehen werden darf. Man kann demnach zu jedem der in §. 34. entwickelten Sätze ein Correlat aufstellen, welches die Erweiterung desselben auf complexe Reihen ausspricht. So z. B. wird unter der dort gemachten Determination das Produkt der convergenten reellen Reihen

$$(4)\qquad \begin{cases} a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \\ b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots \end{cases}$$

durch die convergente Reihe

$$(5)\qquad a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \dots$$

dargestellt; betrachtet man statt dessen die complexen Reihen

$$(6)\qquad \begin{cases} a_0 + a_1 z (\cos\theta + i \sin\theta) + a_2 z^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \dots \\ b_0 + b_1 z (\cos\theta + i \sin\theta) + b_2 z^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \dots \end{cases}$$

welche convergiren, wenn hier z denselben Bedingungen wie in No. (4) genügt, so enthält das Produkt, nach Potenzen von z geordnet, die nämlichen Partialprodukte $a_0 b_0$, $a_0 b_1$, $a_1 b_0$ etc. wie No. (5), aber aufserdem noch mit goniometrischen Faktoren behaftet. Zerlegt man das Produkt in seinen reellen und imaginären Theil, so findet man zwei Reihen, welche rascher als die Reihe (5) convergiren, weil ihre einzelnen Glieder kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe (5) sind; es convergirt also auch die complexe Reihe, welche das Produkt der complexen Reihen in (6) darstellt. Ähnliche Schlüsse gelten für alle solche Erweiterungen der in §. 34. enthaltenen Theoreme.

Sowie nun früher Summirungen reeller Reihen vorgenommen wurden, so können jetzt auch complexe Reihen summirt werden, indem man sie analogen Betrachtungen wie jene unterwirft. Um diefs zunächst an einem ganz einfachen Beispiele zu zeigen, erinnern wir an die Summenformel der geometrischen Progression:

$$(7)\qquad 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

die man auch als das Ergebnifs einer ausgeführten Division ansehen könnte. Da nun, den Lehren des §. 51. zufolge, die Grundoperationen bei complexen Zahlen dieselben wie bei reellen Zahlen sind, so mufs die obige Formel auch für ein complexes x, etwa

$$x = z (\cos\theta + i \sin\theta)$$

richtig bleiben; man erhält durch diese Substitution

$$(8)\qquad 1 + z (\cos\theta + i \sin\theta) + z^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \dots$$
$$\dots + z^{n-1} (\cos \overline{n-1}\,\theta + i \sin \overline{n-1}\,\theta)$$
$$= \frac{1 - z^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)}{1 - z\cos\theta - iz\sin\theta}$$

Multiplizirt man Zähler und Nenner des rechter Hand stehenden Ausdrucks mit

$$1 - z\cos\theta + iz\sin\theta$$

und vereinigt soviel als möglich, so geht derselbe in den folgenden über:

$$\frac{1 - z\cos\theta - z^n\cos n\theta + z^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}$$

$$+ i\frac{z\sin\theta - z^n\sin n\theta + z^{n+1}\sin(n-1)\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}$$

Aus der Vergleichung der reellen und imaginären Partie des vorliegenden Ausdruckes mit den reellen und imaginären Theilen der Reihe in (8) fliefsen jetzt unmittelbar folgende Reihenformeln:

(9) $$1 + z\cos\theta + z^2\cos 2\theta + z^3\cos 3\theta + \ldots + z^{n-1}\cos(n-1)\theta$$

$$= \frac{1 - z\cos\theta - z^n\cos n\theta + z^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}$$

(10) $$z\sin\theta + z^2\sin 2\theta + z^3\sin 3\theta + \ldots + z^{n-1}\sin(n-1)\theta$$

$$= \frac{z\sin\theta - z^n\sin n\theta + z^{n+1}\sin(n-1)\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}$$

von deren Richtigkeit man sich auch umgekehrt überzeugen kann, indem man beiderseits mit $1 - 2z\cos\theta + z^2$ multiplizirt und linker Hand jedes doppelte Produkt zweier goniometrischen Funktionen in eine Summe zweier Cosinus oder Sinus zerlegt.

Nehmen wir z als ächten Bruch, lassen die Gliederzahl n ins Unendliche wachsen und beachten, dafs z^n unter der obigen Voraussetzung die Null zur Gränze hat, so gehen die Formeln (8), (9) und (10) in die folgenden über:

(11) $$1 + z(\cos\theta + i\sin\theta) + z^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots$$

$$= \frac{1}{1 - z(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1 - z\cos\theta + iz\sin\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}$$

(12) $$1 + z\cos\theta + z^2\cos 2\theta + z^3\cos 3\theta + z^4\cos 4\theta + \ldots$$

$$= \frac{1 - z\cos\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}$$

(13) $$z\sin\theta + z^2\sin 2\theta + z^3\sin 3\theta + z^4\sin 4\theta + \ldots$$

$$= \frac{z\sin\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}$$

wobei allen drei Formeln die Bedingung

$$1 > z > -1$$

gemeinschaftlich zukommt.

§. 62.

Die Binomialreihe mit complexer Veränderlichen.

Die Rechnungsoperationen, welche wir früher vorgenommen haben, um die Summe der Reihe

$$(1)\quad \begin{cases} 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots \\ \text{oder} \\ 1+\mu_1 x+\mu_2 x^2+\mu_3 x^3+\ldots \end{cases}$$

zu finden, sind ganz gleichförmig auf die Reihe

$$(2)\quad 1+\mu_1 z(\cos\theta+i\sin\theta)+\mu_2 z^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+\ldots$$

anwendbar, welche als convergent anzusehen ist, wenn z hier die Bedingung erfüllt, welcher x in (1) unterworfen war, wenn also $+1>z>-1$ ist.

Jene Rechnungsoperationen bezogen sich nämlich blos auf μ und waren von der Frage, ob x reell oder imaginär sei, ganz unabhängig. Da nun die Gröfse μ in der Reihe (2) auf ganz die nämliche Weise vorkommt, wie in (1), so können wir auch hier die Summe der Reihe mit $f(\mu)$ bezeichnen und finden durch die nach dem vorigen Paragraphen erlaubte Multiplikation zweier Reihen, welche dadurch aus (2) entstehen, dafs man einmal α und dann β für μ setzt, ganz wie früher die Gleichung

$$f(\alpha)\, f(\beta)=f(\alpha+\beta)$$

Da nun hier α, β reelle Gröfsen sind, also die Funktion $f(\mu)$ wenigstens in Beziehung auf μ reell ist, so haben wir

$$f(\mu)=[f(1)]^{\mu}$$

Der Werth von $f(1)$ wird aus (2) dadurch bestimmt, dafs man $\mu=1$ nimmt, wodurch sich

$$f(1)=1+r\cos\theta+ir\sin\theta$$

findet. Wir haben folglich, vermöge der Bedeutung von $f(\mu)$, für $+1>z>-1$

$$(3)\quad (1+z\cos\theta+iz\sin\theta)^{\mu}$$
$$=1+\mu_1 z(\cos\theta+i\sin\theta)+\mu_2 z^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+\ldots$$

Wollen wir eine Vergleichung der reellen und imaginären Theile beiderseits vornehmen, so müssen wir erst die Gröfse $1+z\cos\theta+iz\sin\theta$ auf die Form $\varrho(\cos\zeta+i\sin\zeta)$ bringen, damit dann

$$(4)\quad (1+z\cos\theta+iz\sin\theta)^{\mu}=\varrho^{\mu}(\cos\mu\zeta+i\sin\mu\zeta)$$

werde, wo es nun leicht ist, den reellen und imaginären Theil heraus zu nehmen. Aus

$$1+z\cos\theta+iz\sin\theta=\varrho\cos\zeta+i\varrho\sin\zeta$$

folgt aber

$$1 + z\cos\theta = \varrho\cos\zeta, \quad z\sin\theta = \varrho\sin\zeta$$

und hieraus durch beiderseitige Quadrirung und Addition

$$1 + 2z\cos\theta + z^2 = \varrho^2$$

(5) $$\varrho = (1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

Ferner ist durch Division mit der ersten Gleichung in die zweite

$$\frac{z\sin\theta}{1 + z\cos\theta} = \tan\zeta$$

folglich

(6) $$\zeta = Arctan\,\frac{z\sin\theta}{1 + z\cos\theta} \pm 2k\pi$$

wo k jede beliebige ganze Zahl bedeuten kann. Für diesen Werth ist nun nach (4) und (3)

(7) $$(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu}(\cos\mu\zeta + i\sin\mu\zeta)$$
$$= 1 + \mu_1 z(\cos\theta + i\sin\theta) + \mu_2 z^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots$$

Für $z = 0$ wird hier $\zeta = \pm 2k\pi$, folglich

$$\cos(2\mu k\pi) \pm i\sin(2\mu k\pi) = 1$$

und diefs mufs für jedes μ richtig bleiben. Das kann aber nur geschehen, wenn $k = 0$ ist, wodurch der Werth von ζ sich vereinfacht.

Für

(8) $$\zeta = Arctan\,\frac{z\sin\theta}{1 + z\cos\theta}$$

erhalten wir nun durch Vergleichung der reellen und imaginären Theile der Gleichung (7)

(9) $$(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cos\mu\zeta$$
$$= 1 + \mu_1 z\cos\theta + \mu_2 z^2\cos 2\theta + \mu_3 z^3\cos 3\theta + \ldots$$

(10) $$(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\sin\mu\zeta$$
$$= \mu_1 z\sin\theta + \mu_2 z^2\sin 2\theta + \mu_3 z^3\sin 3\theta + \ldots$$

zwei Reihen, welche bei ganzen positiven μ abbrechen und in diesem Falle für jedes beliebige z gelten, die aber für andere willkührliche μ nur so lange der linken Seite gleich gelten, als der absolute Werth von z ein ächter Bruch ist.

Dieselben enthalten mehrere Reihen, die wir zum Theil schon kennen gelernt haben, als spezielle Fälle in sich. Für ein ganzes positives $\mu = m$ und für $z = 1$ erhält man unter der Bemerkung, dafs hier

$$\zeta = Arctan\,\frac{\cos\theta}{1 + \cos\theta} = Arctan\,\frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cdot\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}$$
$$= Arctan\,\tan\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\theta$$

ist, die beiden Formeln:

(11) $$\left(2\cos\frac{1}{2}\theta\right)^m \cos\frac{m}{2}\theta$$
$$= m_0 + m_1 \cos\theta + m_2 \cos 2\theta + m_3 \cos 3\theta + \ldots + m_m \cos m\theta$$

(12) $$\left(2\cos\frac{1}{2}\theta\right)^m \sin\frac{m}{2}\theta$$
$$= m_1 \sin\theta + m_2 \sin 2\theta + m_3 \sin 3\theta + \ldots + m_m \sin m\theta$$

Für $\mu = -1$, also $+1 > z > -1$, mufs man beachten, dafs immer

$$Arctan\, x = Arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = Arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

mithin

$$\cos Arctan\, x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin Arctan\, x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist. Man findet dann die Formeln (12) und (13) des vorigen Paragraphen.

Nimmt man ferner $\theta = \frac{\pi}{2}$, so wird $\zeta = Arctan\, z$ und

$$(1+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cos(\mu\, Arctan\, z) = 1 - \mu_2 z^2 + \mu_4 z^4 - \mu_6 z^6 + \ldots$$
$$(1+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\sin(\mu\, Arctan\, z) = \mu_1 z - \mu_3 z^3 + \mu_5 z^5 - \ldots$$

wobei $+1 > z > -1$ sein mufs. Beachtet man aber, dafs aus $\zeta = Arctan\, z$ folgt $z = \tan\zeta$, folglich

$$(1+z^2)^{\frac{1}{2}\mu} = (1+\tan^2\zeta)^{\frac{1}{2}\mu} = \frac{1}{\cos^\mu\zeta}$$

so erhält man

(13) $$\frac{\cos\mu\zeta}{\cos^\mu\zeta} = 1 - \mu_2\tan^2\zeta + \mu_4\tan^4\zeta - \mu_6\tan^6\zeta + \ldots$$

(14) $$\frac{\sin\mu\zeta}{\cos^\mu\zeta} = \mu_1\tan\zeta - \mu_3\tan^3\zeta + \mu_5\tan^5\zeta - \ldots$$

Gleichungen, welche für andere als ganze positive μ nur so lange gelten, als $\tan\zeta$ ein ächter Bruch, mithin z zwischen den Gränzen $+\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4}$ bleibt.

Die vorstehenden Formeln sind die fruchtbarsten für die ganze Theorie der goniometrischen Funktionen. Die zahlreichen Folgerungen, welche sich von ihnen machen lassen, werden wir später behandeln, wo wir sie von einer anderen Seite her ansehen werden.

§. 63.

Die Exponenzialreihe mit complexer Veränderlichen.

Von den beiden Reihen (9) und (10), welche aus der Binomialformel für eine complexe Veränderliche entspringen, können wir nun auf ähnliche Weise zur Exponenzialreihe übergehen, wie diefs früher geschehen ist.

Setzen wir nämlich εz an die Stelle von z und $\mu = \frac{1}{\varepsilon}$, so wird

$$(1) \qquad (1 + 2\varepsilon z \cos\theta + \varepsilon^2 z^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} \cos\frac{\zeta}{\varepsilon}$$

$$= 1 + \frac{1}{1} z \cos\theta + \frac{1-\varepsilon}{1 \,.\, 2} z^2 \cos 2\theta + \frac{(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} z^3 \cos 3\theta + \ldots$$

und

$$(2) \qquad (1 + 2\varepsilon z \cos\theta + \varepsilon^2 z^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} \sin\frac{\zeta}{\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{1} z \sin\theta + \frac{1-\varepsilon}{1 \,.\, 2} z^2 \sin 2\theta + \frac{(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} z^3 \sin 3\theta + \ldots$$

und diese Reihen gelten, so lange εz zwischen den Gränzen $+1$ und -1, also z zwischen $\frac{1}{\varepsilon}$ und $-\frac{1}{\varepsilon}$ liegt. Lassen wir jetzt ε bis zur Gränze Null abnehmen, so bekommen wir auf der rechten Seite Reihen, welche ganz die in der Exponenzialreihe vorkommenden Coeffizienten $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1 \,.\, 2}$, $\frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ u. s. f. enthalten, welche aber zugleich nach Potenzen von z und den Cosinus und Sinus der Vielfachen von θ fortschreiten. Wir haben nur noch die Gränzwerthe zu bestimmen, welchen sich die linken Seiten jener Gleichungen nähern. Bezeichnen wir nun $2\varepsilon z \cos\theta + \varepsilon^2 z^2$ mit δ, wo jetzt δ eine Gröfse ist, die gleichzeitig mit ε bis zur Gränze Null abnimmt, so ist

$$(1 + 2\varepsilon z \cos\theta + \varepsilon^2 z^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} = (1 + \delta)^{\frac{z\cos\theta + \frac{1}{2}\varepsilon^2 z^2}{\delta}}$$

also

$$Lim\, (1 + 2\varepsilon z \cos\theta + \varepsilon^2 z^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} = Lim \left[(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]^{z\cos\theta + \frac{1}{2}\varepsilon^2 z^2}$$

wo nun δ und ε gleichzeitig bis zur Gränze Null zu vermindern sind; diefs giebt

$$(3) \qquad Lim\, (1 + 2\varepsilon z \cos\theta + \varepsilon^2 z^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} = \varepsilon^{z\cos\theta}.$$

Ferner ist jetzt

$$(4)\qquad \zeta = Arctan \frac{\varepsilon z \sin\theta}{1 + \varepsilon z \cos\theta}$$

folglich

$$\tan\zeta = \frac{\varepsilon z \sin\theta}{1 + \varepsilon z \cos\theta}$$

und durch beiderseitige Multiplikation mit $\frac{\zeta}{\varepsilon \tan\zeta}$

$$(5)\qquad \frac{\zeta}{\varepsilon} = \frac{\zeta}{\tan\zeta} \cdot \frac{z \sin\theta}{1 + \varepsilon z \cos\theta}.$$

Es erhellt aber aus (4), dafs ζ eine Gröfse ist, welche mit ε gleichzeitig bis zur Gränze Null abnimmt. Man hat daher

$$Lim \frac{\zeta}{\tan\zeta} = Lim \frac{\cos\zeta}{\frac{\sin\zeta}{\zeta}} = 1$$

folglich nach (5)

$$(6)\qquad Lim \frac{\zeta}{\varepsilon} = z \sin\theta.$$

Gehen wir nun in den Gleichungen (1) und (2) zur Gränze für abnehmende ε über, so ergeben sich unter Benutzung der gefundenen Gränzbestimmungen (3) und (6) die folgenden Reihen:

$$(7)\qquad e^{z\cos\theta} \cos(z \sin\theta)$$
$$= 1 + \frac{z}{1}\cos\theta + \frac{z^2}{1.2}\cos 2\theta + \frac{z^3}{1.2.3}\cos 3\theta + \ldots$$

$$(8)\qquad e^{z\cos\theta} \cos(z \sin\theta)$$
$$= \frac{z}{1}\sin\theta + \frac{z^2}{1.2}\sin 2\theta + \frac{z^3}{1.2.3}\sin 3\theta + \ldots$$

und diese gelten für alle z, welche zwischen $Lim \frac{1}{\varepsilon}$ und $Lim - \frac{1}{\varepsilon}$, d. h. zwischen $+\infty$ und $-\infty$ liegen.

Nimmt man in den obigen Gleichungen $\theta = \frac{\pi}{2}$, so kommt man auf die Reihen für den Cosinus und Sinus zurück.

Man kann die Formeln (7) und (8) auch noch unter etwas anderer Gestalt darstellen, wenn man nämlich $z\cos\theta = y$, $z \sin\theta = x$ setzt, woraus $\theta = Arctan \frac{x}{y}$ und $z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ folgt. Man hat dann

$$e^y \cos x = 1 + \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{1} \cos\left(Arctan \frac{x}{y}\right)$$
$$+ \frac{(x^2+y^2)^{\frac{2}{2}}}{1 \cdot 2} \cos\left(2\, Arctan \frac{x}{y}\right)$$
$$+ \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos\left(3\, Arctan \frac{x}{y}\right)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$

$$e^y \sin x = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{1} \sin\left(Arctan \frac{x}{y}\right)$$
$$+ \frac{(x^2+y^2)^{\frac{2}{2}}}{1 \cdot 2} \sin\left(2\, Arctan \frac{x}{y}\right)$$
$$+ \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin\left(3\, Arctan \frac{x}{y}\right)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$

worin nun x und y zwei von einander unabhängige veränderliche Gröfsen darstellen.

§. 64.

Die Logarithmenreihe mit complexer Veränderlichen.

Wir können den Übergang von der Binomialreihe zur logarithmischen Reihe auf ähnliche Weise bewerkstelligen, wie diefs schon früher geschehen ist. Durch beiderseitige Subtraktion der Einheit und nachherige Division mit μ erhalten wir nämlich aus Formel (9) §. 62:

$$(1) \qquad \frac{(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu} \cos\mu\zeta - 1}{\mu}$$
$$= \frac{1}{1} z \cos\theta + \frac{\mu - 1}{1 \cdot 2} z^2 \cos 2\theta + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 \cos 3\theta + \ldots$$

und wenn wir hier μ bis zur Gränze Null abnehmen lassen, so erhalten wir rechts eine Reihe, welche die nämlichen Coeffizienten 1, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{3}$ u. s. f. enthält wie die logarithmische und aufserdem nach Potenzen von z und den Cosinus der Vielfachen von θ gleichzeitig fortschreitet. Wegen

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} x$$

ist aber

$$\frac{(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cos\mu\zeta - 1}{\mu}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu} - 1}{\frac{1}{2}\mu} - (1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\mu\zeta}{\frac{1}{2}\mu}\sin\frac{1}{2}\mu\zeta$$

Hier ist nun $\frac{1}{2}\mu$ eine Gröfse, die mit μ gleichzeitig bis zur Gränze Null abnimmt; es wird also

$$Lim\,\frac{1}{2}\cdot\frac{(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu} - 1}{\frac{1}{2}\mu} = \frac{1}{2}l(1 + 2z\cos\theta + z^2),$$

nach Formel (15) §. 8, und

$$Lim\,(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\mu\zeta}{\frac{1}{2}\mu}\sin\frac{\mu}{2}\zeta = 1\cdot 1\cdot 0 = 0$$

folglich

$$Lim\,\frac{(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cos\mu\zeta - 1}{\frac{1}{2}\mu}$$

$$= \frac{1}{2}l(1 + 2z\cos\theta + z^2).$$

Mit Hülfe dieser Gleichung ergiebt sich aus (1)

(2) $$\frac{1}{2}l(1 + 2z\cos\theta + z^2)$$

$$= z\cos\theta - \frac{1}{2}z^2\cos 2\theta + \frac{1}{3}z^3\cos 3\theta - \ldots$$

eine Reihe, welche nur so lange gilt, als z innerhalb der Gränzen $+1$ und -1 liegt, wie in der ursprünglichen Formel (9) §. 62.

Aus Formel (10) §. 62. findet sich ferner:

(3) $$(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cdot\frac{\sin\mu\zeta}{\mu}$$

$$= \frac{1}{1}z\sin\theta + \frac{\mu - 1}{1\cdot 2}z^2\sin 2\theta + \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3\sin 3\theta + \ldots$$

Lassen wir hier μ bis zur Gränze Null abnehmen, so ist

$$Lim\,(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu} = 1$$

$$Lim\,\frac{\sin\mu\zeta}{\mu} = \zeta = Arctan\,\frac{z\sin\theta}{1 + z\cos\theta}$$

folglich

(4) $$Arctan\,\frac{z\,sin\,\theta}{1+z\,cos\,\theta}$$
$$= z\,sin\,\theta - \frac{1}{2}z^2\,sin\,2\theta + \frac{1}{3}z^3\,sin\,3\theta - \ldots,$$
wo nun wieder $+1 > z > -1$ sein mufs.

Für $\theta = \frac{\pi}{2}$ reduzirt sich die Gleichung (2) auf eine bekannte logarithmische Reihe, und die Gleichung (4) auf die Reihe für $Arctan\,z$.

Man kann sich leicht überzeugen, dafs die Reihen (2) und (4) noch für $z = \pm 1$ richtig bleiben müssen. Das Binomialtheorem gilt nämlich auch dann noch für $x = \pm 1$, wenn die Gröfse μ in $(1+x)^\mu$ keine negativen Werthe annimmt. Da nun bei unserem Gränzübergange μ von der positiven Seite her bis Null abnahm, so ist diese Bedingung erfüllt. Man erhält dann aus (2) für $z = +1$, unter der Bemerkung, dafs $1 + cos\,\theta = 2\,cos^2\frac{1}{2}\theta$ ist,

(5) $$l2 + \frac{1}{2}l\left(cos^2\frac{1}{2}\theta\right)$$
$$= cos\,\theta - \frac{1}{2}cos\,2\theta + \frac{1}{3}cos\,3\theta - \frac{1}{4}cos\,4\theta + \ldots$$

Es wäre hier falsch, statt $\frac{1}{2}l\left(cos^2\frac{1}{2}\theta\right)$ blos $l\,cos\frac{1}{2}\theta$ schreiben zu wollen, weil überhaupt $\frac{1}{2}l(x^2)$ und lx ganz verschiedene Funktionen sind. So würde im vorliegenden Falle $l\,cos\frac{1}{2}\theta$ imaginär werden, wenn $\theta > \pi$ wäre, während $\frac{1}{2}l\left(cos^2\frac{1}{2}\theta\right)$ immer reell bleibt und auch bleiben mufs, weil die Summe der Reihe rechts immer eine reelle Gröfse sein mufs. Die gewonnene Gleichung ist übrigens in so fern von Bedeutung, als sie einen Weg zur Berechnung der sogenannten künstlichen Cosinus zeigt. Nimmt man dagegen in (2) $z = -1$ und bemerkt, dafs $1 - cos\,\theta = 2\,sin^2\frac{1}{2}\theta$ ist, so erhält man

(6) $$l2 + \frac{1}{2}l\left(sin^2\frac{1}{2}\theta\right)$$
$$= -cos\,\theta - \frac{1}{2}cos\,2\theta - \frac{1}{3}cos\,3\theta - \frac{1}{4}cos\,4\theta - \ldots$$

eine Gleichung, welche die Berechnung der künstlichen Sinus lehrt. Subtrahirt man (5) von (6) und umgekehrt (6) von (5), so ergeben sich noch die Gleichungen

$$(7)\qquad \frac{1}{4}\,l\left(\tan^2\frac{1}{2}\theta\right) = -\cos\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta - \frac{1}{5}\cos 5\theta - \ldots$$

$$(8)\qquad \frac{1}{4}\,l\left(\cot^2\frac{1}{2}\theta\right) = \cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta + \ldots$$

Eine Eigenthümlichkeit bietet die Gleichung (4) dar, wenn in ihr $z = 1$ genommen wird. Man erhält dann, unter der Bemerkung, dafs $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ und $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta$, folglich

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \tan\frac{1}{2}\theta$$

ist,

$$(9)\qquad Arctan\left(\tan\frac{1}{2}\theta\right)$$

$$= \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta + \ldots$$

Es wäre hier unrichtig, statt $Arctan\left(\tan\frac{1}{2}\theta\right)$ allgemein $\frac{1}{2}\theta$ schreiben zu wollen. Sonst würde man z. B. für $\theta = 2\pi + \theta'$ finden

$$\frac{1}{2}(2\pi + \theta') = \sin\theta' - \frac{1}{2}\sin 2\theta' + \frac{1}{3}\sin 3\theta' - \ldots$$

was offenbar falsch ist, wenn man es mit dem Vorigen vergleicht. Behält man indessen die vorige Form bei, so ist $\tan\frac{1}{2}(2\pi + \theta') = \tan\frac{1}{2}\theta'$, folglich $Arctan\left[\tan\frac{1}{2}(2\pi + \theta')\right] = Arctan\left(\tan\frac{1}{2}\theta'\right) = \frac{1}{2}\theta'$ und nun ist die Gleichung richtig. Der Grund des Fehlers liegt darin, dafs $Arctan\left(\tan\frac{1}{2}\theta\right)$ und $\frac{1}{2}\theta$ verschiedene Funktionen von θ sind; die erste ist periodisch, weil die darin vorkommende Tangente eine periodische Funktion ist, die zweite wächst immer, wenn θ zunimmt. Dagegen sind $Arctan\left(\tan\frac{1}{2}\theta\right)$ und $\frac{1}{2}\theta$ so lange identisch, als in den Werthen von $\tan\frac{1}{2}\theta$ keine Periodicität, sondern ein beständiges Wachsthum statt findet, nämlich von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$, weil dann die Tangente von 0 bis ∞ geht. Man darf daher nur für das Intervall 0 bis π behaupten, dafs

$$(10)\qquad \frac{1}{2}\theta = \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta - \ldots,$$

ist. An der Stelle $\theta = \pi$ tritt hier noch eine Unstetigkeit ein. Es hat

nämlich, wie früher gezeigt wurde, $tan\frac{\pi}{2}$ zwei Werthe, $+\infty$ und $-\infty$, also hat auch $Arctan\left(tan\frac{\pi}{2}\right)$, deren zwei: $Arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}$ und $Arctan(-\infty)=-Arctan(\infty)=-\frac{\pi}{2}$. Die Summe der Reihe rechts in (9) kann aber doch nur einen Werth haben, und dieser bestimmt sich aus der Reihe selbst sehr einfach: jedes ihrer Glieder verschwindet nämlich für $\theta=\pi$, und also giebt sie zur Summe Null, mithin keinen der beiden Werthe von $Arctan\left(tan\frac{\pi}{2}\right)$, sondern das arithmetische Mittel aus ihnen. Unter der Bedingung

$$\pi > \theta \geqq 0$$

ist also

$$(11)\qquad \frac{1}{2}\theta = sin\,\theta - \frac{1}{2}sin\,2\theta + \frac{1}{3}sin\,3\theta - \ldots$$

Nimmt man in Formel (4) $z=-1$ und beachtet, dafs

$$\frac{sin\,\theta}{1-cos\,\theta}=\frac{2\,sin\frac{1}{2}\theta\;cos\frac{1}{2}\theta}{2\,sin^2\frac{1}{2}\theta}=cot\frac{1}{2}\theta=tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\theta\right)$$

ist, so erhält man

$$(12)\qquad Arctan\left[tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\theta\right)\right]$$
$$= sin\,\theta + \frac{1}{2}sin\,2\theta + \frac{1}{3}sin\,3\theta + \frac{1}{4}sin\,4\theta + \ldots$$

Ist nun hier $\pi \geqq \theta > 0$, so kann man statt des Ausdruckes links einfach $\frac{\pi-\theta}{2}$ setzen und hat dann für

$$\pi \geqq \theta > 0$$

$$(13)\qquad \frac{\pi-\theta}{2} = sin\,\theta + \frac{1}{2}sin\,2\theta + \frac{1}{3}sin\,3\theta + \ldots$$

Für $\theta=0$ gilt diese Formel nicht, weil dann die Funktion links in (12) unstetig wird und die zwei Werthe $+\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ annimmt, von denen keiner der Reihe gleich ist, welche sich hier annullirt.

Addirt man die Gleichungen (11) und (13), welche von $\theta=0$ bis $\theta=\pi$, die erste mit Ausschliefsung des Werthes $\theta=\pi$ und die zweite mit Ausnahme von $\theta=0$ gelten, so erhält man das merkwürdige Resultat

(14) $\frac{\pi}{4} = \sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \frac{1}{5}\sin 5\theta + \ldots$

welches nur für $\pi > \theta > 0$, exclusive $\theta = \pi$ und $\theta = 0$ besteht.

§. 65.

Reihen für die Sinus und Cosinus vielfacher Bögen.

Um die Untersuchungen der §§. 62., 63. und 64., die sich mit Reihen von der Form

(1) $A + Bz(\cos\theta + i\sin\theta) + Cz^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots$

beschäftigten, nicht unterbrechen zu müssen, haben wir die zahlreichen Consequenzen einstweilen bei Seite gelassen, zu welchen manche der gefundenen Formeln Veranlassung geben; wir gehen jetzt näher darauf ein.

Die Gleichungen (13) und (14) in §. 62. können, wenn man noch x für ζ schreibt, folgendermafsen dargestellt werden:

(2) $$\cos\mu x$$
$$= \cos^\mu x\,[\mu_0 - \mu_2 \tan^2 x + \mu_4 \tan^4 x - \mu_6 \tan^6 x + \ldots]$$

(3) $$\sin\mu x$$
$$= \cos^\mu x\,[\mu_1 \tan x - \mu_3 \tan^3 x + \mu_5 \tan^5 x - \ldots\ldots\ldots]$$

oder durch Auflösung der Parenthesen und Einsetzung des Werthes $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

(4) $$\cos\mu x$$
$$= \mu_0 \cos^\mu x - \mu_2 \cos^{\mu-2} x \sin^2 x + \mu_4 \cos^{\mu-4} x \sin^4 x - \ldots\ldots$$

(5) $$\sin\mu x$$
$$= \mu_1 \cos^{\mu-1} x \sin x - \mu_3 \cos^{\mu-3} x \sin^3 x + \mu_5 \cos^{\mu-5} x \sin^5 x - \ldots$$

Bei ganzen positiven μ gelten diese Formeln ohne Einschränkung, aufserdem nur für $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$.

I. Die Reihen auf den rechten Seiten der Gleichungen (4) und (5) gehen nach Potenzen von *cos* und *sin* zugleich; die ersteren fallen, die zweiten steigen. Da nun aber der Cosinus durch den Sinus ausgedrückt werden kann und überhaupt

$$\cos^p x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{p}{2}}$$

(6) $$= \left(\frac{p}{2}\right)_0 - \left(\frac{p}{2}\right)_1 \sin^2 x + \left(\frac{p}{2}\right)_2 \sin^4 x - \ldots$$

ist, so sieht man, dafs es wohl möglich sein mufs, die Reihen (4) und (5) in andere zu transformiren, welche nach den steigenden Potenzen von $\sin x$ fortgehen. In der That hat man nur nöthig, die einzelnen Cosinuspotenzen nach Formel (3) in Reihen zu verwandeln, wobei für die Glei-

chung (4) p durch μ, $\mu-2$, $\mu-4$ etc., für die Gleichung (5) durch $\mu-1$, $\mu-3$, $\mu-5$ etc. zu ersetzen ist. Nimmt man noch der Kürze wegen $\sin x = y$, so erhält man jetzt

$$\begin{array}{llll} \cos \mu x & & & \\ = \mu_0 \left(\frac{\mu}{2}\right)_0 - \mu_0 \left(\frac{\mu}{2}\right)_1 y^2 & + \mu_0 \left(\frac{\mu}{2}\right)_2 y^4 & - \mu_0 \left(\frac{\mu}{2}\right)_3 y^6 & + \cdots \\ \quad - \mu_2 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_0 & + \mu_2 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_1 & - \mu_2 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_2 & + \cdots \\ & + \mu_4 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_0 & - \mu_4 \left(\frac{\mu-4}{2}\right)_1 & + \cdots \\ & & - \mu_6 \left(\frac{\mu-6}{2}\right)_0 & + \cdots \end{array}$$

Bezeichnen wir die Coefficienten von y^0, y^2, y^4 etc. mit A_0, A_2, A_4 etc., so ist

$$(7) \qquad \cos \mu x = A_0 - A_2 y^2 + A_4 y^4 - A_6 y^6 + \ldots$$

und überhaupt für ein ganzes positives n

$$A_{2n} = \mu_0 \left(\frac{\mu}{2}\right)_n + \mu_2 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_{n-1} + \mu_4 \left(\frac{\mu-4}{2}\right)_{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + \mu_{2n-2} \left(\frac{\mu-2n+2}{2}\right)_1 + \mu_{2n} \left(\frac{\mu-2n}{2}\right)_0$$

Wir haben aber die Summe aller Glieder rechts schon früher auf einen geschlossenen Ausdruck gebracht; vermöge der Gleichung (13) in §. 40. ist nämlich auch

$$A_{2n} = \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)\ldots(\mu^2-\overline{2n-2}^2)}{1.2.3.4\ldots(2n)}$$

Bringen wir diefs in der Gleichung (7) für $n = 1, 2, 3, \ldots$ in Anwendung und bemerken, dafs dort $A_0 = 1$ ist, so ergiebt sich die wichtige Relation:

$$(8) \qquad \cos \mu x$$
$$= 1 - \frac{\mu^2}{1.2}\sin^2 x + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 x + \ldots$$

Dieselbe gilt für jedes x, wenn μ eine gerade Zahl ist, weil in diesem Falle die in (4) vorkommenden Potenzen

$$\cos^\mu x = (1-\sin^2 x)^{\frac{\mu}{2}}, \quad \cos^{\mu-2} x = (1-\sin^2 x)^{\frac{\mu-2}{2}}$$

sämmtlich ganze Exponenten bekommen, für welche das Binomialtheorem allgemein richtig ist. Für andere als gerade μ geht die Reihe rechts ins Unendliche fort und gilt dem Ausdrucke $\cos \mu x$ nur so lange gleich, als hier x der nämlichen Bedingung unterworfen ist, wie in den Formeln (2), (3), (4) und (5), nämlich $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$.

II. Eine ganz ähnliche Transformation läfst sich auf die Gleichung (5) anwenden. Setzt man nämlich

$$\cos^{\mu-1} x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{\mu-1}{2}}, \quad \cos^{\mu-3} x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{\mu-3}{2}} \text{ etc.}$$

wobei $\sin x$ der Kürze wegen y heifsen möge und verwandelt alle diese Potenzen nach dem Binomialtheorem in Reihen, so ergiebt sich

$$\begin{array}{llll} \sin \mu x & & & \\ = \mu_1 \left(\frac{\mu-1}{2}\right)_0 y & - \mu_1 \left(\frac{\mu-1}{2}\right)_1 & y^3 + \mu_1 \left(\frac{\mu-1}{2}\right)_2 & y^5 - \ldots \\ & - \mu_3 \left(\frac{\mu-3}{2}\right)_0 & + \mu_3 \left(\frac{\mu-3}{2}\right)_1 & - \ldots \\ & & + \mu_5 \left(\frac{\mu-5}{2}\right)_0 & - \ldots \end{array}$$

Bezeichnen wir die Coefficienten von y, y^3, y^5 etc. mit A_1, A_3, A_5 etc., so ist

$$(9) \qquad \sin \mu x = A_1 y - A_3 y^3 + A_5 y^5 - \ldots$$

und überhaupt

$$A_{2n+1} = \mu_1 \left(\frac{\mu-1}{2}\right)_n + \mu_3 \left(\frac{\mu-3}{2}\right)_{n-1} + \mu_5 \left(\frac{\mu-5}{2}\right)_{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + \mu_{2n-1} \left(\frac{\mu-2n+1}{2}\right)_1 + \mu_{2n+1} \left(\frac{\mu-2n-1}{2}\right)_0$$

Mittelst eines früheren Theoremes über die Binomialcoefficienten ist es sehr leicht, einen kürzeren Ausdruck für A_{2n+1} anzugeben. Wir haben nämlich nach Formel (16) §. 40.:

$$A_{2n+1} = \frac{\mu (\mu^2 - 1^2)(\mu^2 - 3^2) \ldots (\mu^2 - \overline{2n-1}^2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (2n+1)}$$

Bringen wir diefs in der Gleichung (9) für $n = 0, 1, 2, 3$ etc. in Anwendung, so erhalten wir das Theorem:

$$(10) \qquad \sin \mu x$$
$$= \frac{\mu}{1} \sin x - \frac{\mu(\mu^2 - 1^2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \sin^3 x + \frac{\mu(\mu^2 - 1^2)(\mu^2 - 3^2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} \sin^5 x - \ldots$$

und diefs gilt allgemein, wenn μ eine ungerade Zahl ist, für jedes andere μ aber nur unter der Bedingung $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$.

III. Noch ein paar Reihen, welche den vorigen ähnlich gebildet sind, erhält man dadurch, dafs man in (4) und (5) beiderseits mit $\cos x$ dividirt und dann mit den rechts stehen bleibenden Reihen die nämlichen Transformationen vornimmt, welche wir bisher auf die Reihen (4) und (5) unmittelbar angewendet hatten.

Es ist nämlich

$$\frac{\cos\mu x}{\cos x}$$

$$= \mu_0 \cos^{\mu-1} x - \mu_2 \cos^{\mu-3} x \sin^2 x + \mu_4 \cos^{\mu-5} x \sin^4 x - \dots$$

oder, wenn wieder $\sin x = y$, also $\cos x = \sqrt{1-y^2}$ gesetzt wird,

$$\frac{\cos\mu x}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} = \mu_0 \left(\frac{\mu-1}{2}\right)_0 &+ \mu_0 \left(\frac{\mu-1}{2}\right)_1 y^2 + \mu_0 \left(\frac{\mu-1}{2}\right)_2 y^4 - \dots \\ &+ \mu_2 \left(\frac{\mu-3}{2}\right)_0 \quad\; + \mu_2 \left(\frac{\mu-3}{2}\right)_1 \quad - \dots \\ &\qquad\qquad\qquad\quad\; + \mu_4 \left(\frac{\mu-5}{2}\right)_0 \quad - \dots \end{aligned}$$

wofür wir

$$(11) \qquad \frac{\cos\mu x}{\cos x} = A_0 - A_2 y^2 + A_4 y^4 - \dots$$

setzen können, wenn

$$A_{2n} = \mu_0 \left(\frac{\mu-1}{2}\right)_n + \mu_2 \left(\frac{\mu-3}{2}\right)_{n-1} + \mu_4 \left(\frac{\mu-5}{2}\right)_{n-2} + \dots$$
$$\dots + \mu_{2n-2} \left(\frac{\mu-2n+1}{2}\right)_1 + \mu_{2n} \left(\frac{\mu-2n-1}{2}\right)_0$$

ist. Nach Formel (17) in §. 40 ist aber

$$A_{2n} = \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)\dots(\mu^2-\overline{2n-1}^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n)}.$$

Substituirt man diefs in Formel (11), in welcher $A_0 = 1$ ist, und berücksichtigt die Bedeutung von y, so findet sich

$$(12) \qquad \cos\mu x$$

$$= \cos x \left[1 - \frac{\mu^2-1^2}{1 \cdot 2} \sin^2 x + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x - \dots\right]$$

gültig für jedes x, wenn μ eine ungerade Zahl ist, und aufserdem nur unter der Bedingung $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$.

IV. Die Gleichung (5) läfst sich auch in folgender Gestalt schreiben:

$$\frac{\sin\mu x}{\cos x}$$

$$= \mu_1 \cos^{\mu-2} x \sin x - \mu_3 \cos^{\mu-4} x \sin^3 x + \mu_5 \cos^{\mu-6} x \sin^5 x - \dots$$

aus welcher man durch Entwickelung der Cosinuspotenzen für $\sin x = y$ Folgendes erhält:

$$\frac{\sin \mu x}{\cos x}$$

$$= \mu_1 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_0 y - \mu_1 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_1 y^3 + \mu_1 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_2 y^5 - \dots$$
$$- \mu_3 \left(\frac{\mu-4}{2}\right)_0 \quad + \mu_3 \left(\frac{\mu-4}{2}\right)_1 \quad - \dots$$
$$+ \mu_5 \left(\frac{\mu-6}{2}\right)_0 \quad - \dots$$

oder

(13) $$\frac{\sin \mu x}{\cos x} = A_1 y - A_3 y^3 + A_5 y^5 - \dots$$

wobei

$$A_{2n+1} = \mu_1 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_n + \mu_3 \left(\frac{\mu-4}{2}\right)_{n-1} + \mu_5 \left(\frac{\mu-6}{2}\right)_{n-2} + \dots$$
$$\dots + \mu_{2n-1} \left(\frac{\mu-2n}{2}\right)_1 + \mu_{2n+1} \left(\frac{\mu-2n-2}{2}\right)_0$$

Nach Formel (18) §. 40. ist aber

$$A_{2n+1} = \frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)\dots(\mu^2-\overline{2n}^2)}{1.2.3\dots(2n+1)}$$

folglich aus (13) durch Multiplikation mit $\cos x$ und Wiederherstellung des Werthes von y

(14) $$\sin \mu x$$
$$= \cos x \left[\frac{\mu}{1} \sin x - \frac{\mu(\mu^2-2^2)}{1.2.3} \sin^3 x + \frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2.3.4.5} \sin^5 x - \dots\right]$$

und hier ist die Bedingung der Gültigkeit $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$, wenn μ nicht eine ganze gerade Zahl ist, in welchem Falle x ganz willkührlich bleibt.

Wir haben also im Ganzen vier Gleichungen gefunden, welche den Cosinus oder Sinus eines vielfachen Bogens kennen lehren. Von diesen haben die erste und letzte die Eigenschaft mit einander gemein, dafs sie bei geraden μ für jedes x gelten, und die zweite und dritte sind darin einander ähnlich, dafs für ungerade μ in ihnen x beliebig bleibt. Stellen wir die Gleichungen nach diesen Eigenschaften zusammen, so haben wir in ihnen folgende Gruppe:

1) Für jedes x, wenn μ gerade ist, aufserdem für $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$:

(15) $$\cos \mu x$$
$$= 1 - \frac{\mu^2}{1.2} \sin^2 x + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4} \sin^4 x - \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6} \sin^6 x + \dots$$

(16) $$\sin \mu x$$
$$= \cos x \left[\frac{\mu}{1} \sin x - \frac{\mu(\mu^2-2^2)}{1.2.3} \sin^3 x + \frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2.3.4.5} \sin^5 x - \dots\right]$$

2) Für jedes x, wenn μ ungerade ist, aufserdem für $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$:

$$(17) \qquad \sin \mu x$$
$$= \frac{\mu}{1} \sin x - \frac{\mu(\mu^2 - 1^2)}{1.2.3} \sin^3 x + \frac{\mu(\mu^2 - 1^2)(\mu^2 - 3^2)}{1.2.3.4.5} \sin^5 x - \ldots$$

$$(18) \qquad \cos \mu x$$
$$= \cos x \left[1 - \frac{\mu^2 - 1^2}{1.2} \sin^2 x + \frac{(\mu^2 - 1^2)(\mu^2 - 3^2)}{1.2.3.4} \sin^4 x - \ldots\right]$$

§. 66.

Erweiterung der vorigen Formeln.

Die vier Gleichungen, zu denen wir so eben gelangt sind, waren durch die Art ihrer Herleitung auf das Intervall von $-\frac{\pi}{4}$ bis $+\frac{\pi}{4}$ beschränkt, es läfst sich aber diese Beschränkung etwas vermindern, wenn man jene Ableitung nebst den gewonnenen Formeln einer näheren Erörterung unterwirft.

Betrachten wir zunächst die Reihe der Coefficienten in der Formel (15), also die Reihe

$$(1) \quad 1, \quad \frac{\mu^2}{1.2}, \quad \frac{\mu^2(2^2 - \mu^2)}{1.2.3.4}, \quad \frac{\mu^2(2^2 - \mu^2)(4^2 - \mu^2)}{1.2.3.4.5.6}, \quad \ldots$$

und bezeichnen wir die Glieder derselben mit $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ so ist.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n)^2 - \mu^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

und man findet hieraus durch Umkehrung, Subtraktion der Einheit und Multiplikation mit n sehr leicht

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{n(6n + 2 + \mu^2)}{(2n)^2 - \mu^2} = \frac{6 + \frac{2 + \mu^2}{n^2}}{4 - \frac{\mu^2}{n^2}} \ .$$

Der Gränzwerth hiervon für unendlich wachsende n ist $\frac{6}{4}$, also > 1, und mithin convergirt die Reihe (1); die Reihe in No. (15) des vorigen Paragraphen convergirt demnach um so mehr für alle x, da ihre Glieder die entsprechenden Glieder der Reihe (1) nicht übersteigen können. Ähnlich verhält es sich mit der Reihe (17); auch sie convergirt für jedes x, da schon die Reihe ihrer Coefficienten

$$\frac{\mu}{1}, \quad \frac{\mu(1^2 - \mu^2)}{1.2.3}, \quad \frac{\mu(1^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2)}{1.2.3.4.5}, \quad \ldots$$

jederzeit convergent ist, wie man durch Anwendung des schon vorhin benutzten Criteriums finden wird.

Anders gestaltet sich die Sache bei den Reihen, die in den Parenthesen der Gleichungen (16) und (18) stehen; sie convergiren zwar immer, wenn $\sin x < 1$ bleibt, aber nicht mehr für $\sin x = 1$, wie einerseits das angegebene Kennzeichen, andererseits jeder beliebige spezielle Fall z. B. $\mu = \frac{1}{2}$ sehen läfst. Dehnen wir x von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ aus, wodurch der Sinus von x alle Werthe erhält, die er überhaupt annehmen kann, so können wir sagen, dafs die in No. (15) und (17) vorkommenden Reihen für $\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq \frac{\pi}{2}$, die in (16) und (18) verzeichneten dagegen nur für $\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$ convergent sind. Zu dieser Bemerkung kommt noch folgende hinzu.

Hätten wir in den Gleichungen, von denen wir ausgingen:

$$\cos \mu x = \mu_0 \cos^{\mu} x - \mu_2 \cos^{\mu-2} x \sin^2 x + \dots$$

$$\sin \mu x = \mu_1 \cos^{\mu-1} x \sin x - \mu_3 \cos^{\mu-3} x \sin^3 x + \dots$$

$$\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$$

2μ an die Stelle von μ und $\frac{x}{2}$ an die von x gesetzt, so würden unsere Anfangsgleichungen gelautet haben:

$$\cos \mu x$$
$$= (2\mu)_0 \left(\cos \frac{1}{2} x\right)^{2\mu} - (2\mu)_2 \left(\cos \frac{1}{2} x\right)^{2\mu-2} \left(\sin \frac{1}{2} x\right)^2 + \dots$$

$$\sin \mu x$$
$$= (2\mu)_1 \left(\cos \frac{1}{2} x\right)^{2\mu-1} \sin \frac{1}{2} x - (2\mu)_3 \left(\cos \frac{1}{2} x\right)^{2\mu-3} \left(\sin \frac{1}{2} x\right)^3 + \dots$$

und zwar würden dieselben für andere als ganze μ unter der Bedingung $\frac{\pi}{4} > \frac{x}{2} > -\frac{\pi}{4}$, d. h. $\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$, richtig gewesen sein. Auf diese Gleichungen würden sich nun dieselben Transformationen anwenden lassen, die wir im vorigen Paragraphen durchgeführt haben; das Endresultat würde ein ganz ähnliches sein, es würde nämlich aus vier Gleichungen bestehen, die sich von den unter (15) bis (18) verzeichneten darin unterscheiden würden, dafs 2μ an der Stelle von μ und $\frac{x}{2}$ an der Stelle von x stände; also z. B. analog der Gleichung (15)

$$\cos \mu x = 1 - \frac{(2\mu)^2}{1 \cdot 2} \left(\sin \frac{1}{2} x\right)^2 + \frac{(2\mu)^2 [(2\mu)^2 - 2^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\sin \frac{1}{2} x\right)^4 - \dots$$

$$\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$$

oder auch

$$(2)\quad \cos\mu x = 1 - \frac{\mu^2}{1.2}\left(2\sin\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{\mu^2(\mu^2-1^2)}{1.2.3.4}\left(2\sin\frac{1}{2}x\right)^4 - \dots$$

Man hat nun weiter $2\sin^2\frac{1}{2}x = 1 - \cos x$ und $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, wo das Wurzelzeichen nur positiv zu nehmen ist, weil der Cosinus eines zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegenden Winkels positiv ist; durch Substitution folgt jetzt

$$2\sin^2\frac{1}{2}x = 1 - \sqrt{1-\sin^2 x}$$

ferner durch Anwendung des Binomialtheoremes, welches hier wegen $\sin^2 x < 1$ benutzt werden darf,

$$2\sin^2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{2.4}\sin^4 x + \frac{1.3}{2.4.6}\sin^6 x + \dots$$

oder

$$(3)\quad \left(2\sin\frac{1}{2}x\right)^2 = \sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^4 x + \frac{1.3}{4.6}\sin^6 x + \dots$$

Setzen wir diefs in No. (2) ein, und entwickeln die verschiedenen Potenzen der vorliegenden Reihe, so ist

$$\cos\mu x = 1 - \frac{\mu^2}{1.2}\left[\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^4 x + \dots\right]$$
$$+ \frac{\mu^2(\mu^2-1^2)}{1.2.3.4}\left[\sin^4 x + 2.\frac{1}{4}\sin^6 x + \dots\right]$$
$$- \dots\dots\dots\dots$$

oder endlich durch Vereinigung der gleichnamigen Glieder

$$(4)\quad \cos\mu x = 1 - \frac{\mu^2}{1.2}\sin^2 x + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \dots$$

Wir gelangen so zu einer Reihe, welche mit der in No. (15) verzeichneten identisch sein mufs, weil sie wenigstens für ein zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ liegendes x nicht von ihr verschieden sein darf; zugleich erkennen wir aber, dafs die Gleichung (4) und ebenso die frühere (15) unter der erweiterten Bedingung $\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$ richtig bleibt.

Dasselbe Verfahren pafst auf die übrigen Reihen, indem man $\sin\frac{1}{2}x$ jederzeit durch $\sin x$ und $\cos\frac{1}{2}x$ durch $\cos x$ ausdrückt. Wir würden also durch Ausführung der angedeuteten Transformationen zwar der

Form nach keine neuen Resultate erhalten, aber wir erfahren dadurch, dafs die frühere Gültigkeitsbedingung der Gleichungen (15) bis (18), nämlich $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$ einer Erweiterung fähig ist und durch $\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$ ersetzt werden kann. Da endlich die Reihen in (15) und (17) für $x = \pm\frac{\pi}{2}$ noch convergent bleiben, so gelten die Gleichungen (15) und (17) auch für diese Werthe von x. Nach diesen Erörterungen haben wir folgende vier Theoreme:

a) für jedes x, wenn μ eine gerade Zahl ist, aufserdem unter der Bedingung $\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}$, gilt die Gleichung:

$$(5)\qquad \cos \mu x$$
$$= 1 - \frac{\mu^2}{1.2}\sin^2 x + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 x + \dots$$

b) für jedes x, wenn μ gerade, aufserdem für $\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$, ist

$$(6)\qquad \sin \mu x$$
$$= \cos x\left[\frac{\mu}{1}\sin x - \frac{\mu(\mu^2-2^2)}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x - \dots\right]$$

c) für jedes x, wenn μ ungerade, aufserdem unter der Bedingung $\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}$, gilt die Gleichung

$$(7)\qquad \sin \mu x$$
$$= \frac{\mu}{1}\sin x - \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x - \dots$$

d) für jedes x, wenn μ ungerade, aufserdem für $\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$, ist

$$(8)\qquad \cos \mu x$$
$$= \cos x\left[1 - \frac{\mu^2-1^2}{1.2}\sin^2 x + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \dots\right]$$

Dafs diese Formeln keiner ferneren Erweiterung mehr fähig sind, dafs sie also über die angegebenen Gränzen hinaus schlechterdings nicht mehr gelten, kann man sehr leicht a posteriori sehen. So ist z. B. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right)$ und mithin bleibt die Reihe (5) dieselbe, wenn man einmal $\frac{\pi}{2}-z$ und das andere Mal $\frac{\pi}{2}+z$ an die Stelle von x treten läfst; dagegen ist aber $\cos\mu\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$ nicht $= \cos\mu\left(\frac{\pi}{2}+z\right)$, ausgenommen,

wenn μ eine gerade Zahl bedeutet, wie es auch in dem Theoreme a) ausgesprochen ist; dieselbe Bemerkung wiederholt sich bei den übrigen Gleichungen.

§. 67.

Spezialisirungen der vorigen Formeln.

I. Nicht ohne Interesse ist es, die besonderen Formeln zu betrachten, welche aus den Gleichungen (5) bis (8) des vorigen Paragraphen für $\mu = 0$ hervorgehen. Fangen wir mit der Gleichung (8) an, bei welcher die Sache am einfachsten ist, so wird bei dieser Spezialisirung

$$1 = \cos x \left[1 + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\sin^4 x + \ldots\right]$$

$$\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$$

oder durch Transposition von $\cos x$

(1) $$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\sin^4 x + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\sin^6 x + \ldots$$

$$\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$$

Diefs ist jedoch nichts wesentlich Neues, denn wenn man auf die Gleichung

$$\frac{1}{\cos x} = +\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}, \quad \frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$$

das Binomialtheorem anwendet, so gelangt man zu demselben Resultate.

Wollte man in der Gleichung (7) unmittelbar $\mu = 0$ nehmen, so würde man auf die identische Gleichung $0 = 0$ kommen; diefs läfst sich jedoch vermeiden, wenn man vorher mit μ dividirt und dadurch der Gleichung die Form giebt

$$\frac{\sin \mu x}{\mu}$$

$$= \frac{\sin x}{1} - \frac{\mu^2 - 1^2}{1\,.\,2}\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{(\mu^2 - 1^2)\,(\mu^2 - 3^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\frac{\sin^5 x}{5} - \ldots$$

für ein verschwindendes μ ergiebt sich hieraus wegen $Lim\,(\sin \mu x : \mu) = x$,

(2) $$x = \frac{\sin x}{1} + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{\sin^5 x}{5} + \ldots$$

$$\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}$$

Diefs ist nichts Anderes als die Reihe für den Bogen durch den Sinus ausgedrückt; sie stimmt mit der auf S. 182 entwickelten Formel (4) überein, wenn man z statt x schreibt.

Geben wir der Gleichung (6) die Form

$$\frac{\sin \mu x}{\mu}$$

$$= \cos x \left[\sin x - \frac{\mu^2 - 2^2}{2 \cdot 3} \sin^3 x + \frac{(\mu^2 - 2^2)(\mu^2 - 4^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x - \ldots\right]$$

und lassen darin μ in Null übergehen, so gelangen wir zu der neuen Gleichung:

$$(3) \quad x = \cos x \left[\sin x + \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \sin^5 x + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \sin^7 x + \ldots\right]$$

$$\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$$

die noch einer Umwandlung fähig ist, indem man sie unter der Form

$$x = \cos x \sin x \left[1 + \frac{2}{3} \sin^2 x + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \sin^4 x + \ldots\right]$$

darstellt und $\cos x$ sowie $\sin x$ durch $\tan x$ ausdrückt. Mittelst der Formeln

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

findet man

$$(4) \quad x = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$$

Für $\tan x = z$ ergiebt sich hieraus $x = Arctan\, z$, weil x zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ enthalten ist; mithin

$$(5) \quad Arctan\, z = \frac{z}{1 + z^2} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{z^2}{1 + z^2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{z^2}{1 + z^2}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$\infty > z > -\infty$$

Diese Reihe für $Arctan\, z$ besitzt, wie man sieht, die vortheilhafte Eigenschaft, für alle z gültig zu bleiben. Ist z ein ächter Bruch, so kann man die Ausdrücke

$$\frac{1}{1 + z^2}, \quad \frac{1}{(1 + z^2)^2}, \quad \frac{1}{(1 + z^2)^3}, \quad \ldots$$

nach dem Binomialtheoreme in Potenzenreihen verwandeln und kommt dann auf die Formel (1) S. 184 zurück. Benutzt man auch hier, wie früher, die Gleichung

$$\frac{\pi}{4} = Arctan \frac{1}{2} + Arctan \frac{1}{3}$$

um eine Doppelreihe zur Berechnung der Ludolph'schen Zahl zu erhalten, so findet sich aus No. (5)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{2}{10} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$+ \frac{3}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{1}{10} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots\right]$$

wonach die Rechnung sehr leicht ist; noch rascher abnehmende Reihen giebt die Formel

$$\frac{\pi}{4} = 5\,Arctan\,\frac{1}{7} + 2\,Arctan\,\frac{3}{79}$$

nämlich

$$\frac{\pi}{4} = \frac{7}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{2}{100} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$+ \frac{7584}{100000}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{144}{100000} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \cdots\cdots\right]$$

von denen man nur sehr wenig Glieder braucht, um schon eine bedeutende Genauigkeit zu erzielen.

Stellen wir die Gleichung (5) des vorigen Paragraphen in folgender Form dar

$$\frac{1 - \cos \mu x}{\mu^2}$$
$$= \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{\mu^2 - 2^2}{2.3}\frac{\sin^4 x}{4} + \frac{(\mu^2 - 2^2)\,(\mu^2 - 4^2)}{2.3.4.5}\frac{\sin^6 x}{6} - \cdots$$
$$\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}$$

und berücksichtigen dabei, dafs die linke Seite

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{1}{2}\mu x}{\frac{1}{2}\mu}\right)^2$$

ist, so giebt der Übergang zur Gränze für verschwindende μ,

$$(6) \qquad \frac{1}{2}x^2 = \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{2}{3}\frac{\sin^4 x}{4} + \frac{2.4}{3.5}\frac{\sin^6 x}{6} + \cdots$$
$$\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}$$

oder nach beiderseitiger Multiplikation mit 2

$$(7) \qquad x^2 = \frac{\sin^2 x}{1} + \frac{2}{3}\frac{\sin^4 x}{2} + \frac{2.4}{3.5}\frac{\sin^6 x}{3} + \cdots$$
$$\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}$$

Diese Reihe ist in so fern merkwürdig, als sie das Quadrat des Bogens durch den Sinus desselben ausdrückt; für $\sin x = z$ folgt daraus noch

(8) $$Arc^2 sin\, z = \frac{z^2}{1} + \frac{2}{3}\frac{z^4}{2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\frac{z^6}{3} + \dots$$
$$1 \geqq z \geqq -1.$$

II. Noch müssen wir eine anderweite Transformation erwähnen, welche auf die Gleichung

$$cos\, \mu x = 1 - \frac{\mu^2}{1 \cdot 2} sin^2 x + \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} sin^4 x - \dots$$
$$\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}$$

anwendbar ist und zu einem später brauchbaren Resultate führt. Für $\mu = 2\lambda$ und $x = \frac{z}{2}$ folgt nämlich für $\pi \geqq z \geqq -\pi$

(9) $$cos\, \lambda z$$
$$= 1 - \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2}\left(2\, sin\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\left(2\, sin\frac{z}{2}\right)^4$$
$$- \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(2\, sin\frac{z}{2}\right)^6 + \dots$$

Andererseits ist aber, wenn wir in der Formel (7) S. 218 $u = \frac{z}{2}$ setzen und mit 2 multipliziren,

$$(-1)^n \left(2\, sin\frac{z}{2}\right)^{2n}$$
$$= 2\Big[(2n)_0 \cos nz - (2n)_1 \cos (n-1) z + (2n)_2 \cos (n-2) z - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1}(2n)_{n-1} \cos z + (-1)^n \frac{1}{2}(2n)_n\Big]$$

folglich, auf jedes Glied der Reihe in (9) angewendet,

$$cos\, \lambda z =$$
$$1 + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} \cdot 2\left[2_0 \cos z - \frac{1}{2} \cdot 2_1\right]$$
$$+ \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2\left[4_0 \cos 2z - 4_1 \cos z + \frac{1}{2} \cdot 4_2\right]$$
$$+ \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 2\left[6_0 \cos 3z - 6_1 \cos 2z + 6_2 \cos z - \frac{1}{2} \cdot 6_3\right]$$
$$+ \dots\dots\dots\dots$$

Von beiden Seiten dieser Gleichung bilden wir die Quadratur, wobei nur zu berücksichtigen, dafs $Q(cos\, \alpha z) = \frac{sin\, \alpha z}{\alpha}$ und $Q(z^0) = z$ ist; es findet sich auf diesem Wege:

$$\frac{\sin \lambda z}{\lambda} =$$

$$z + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} \cdot 2\left[2_0 \frac{\sin z}{1} - \frac{1}{2} \cdot 2_1 z\right]$$
$$+ \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2\left[4_0 \frac{\sin 2z}{3} - 4_1 \frac{\sin z}{z} + \frac{1}{2} \cdot 4_2 z\right]$$
$$+ \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 2\left[6_0 \frac{\sin 3z}{3} - 6_1 \frac{\sin 2z}{2} + 6_2 \frac{\sin z}{1} - \frac{1}{2} \cdot 6_3 z\right]$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

und diese Gleichung gilt, wie die in No. (9) verzeichnete, für $\pi \geqq z \geqq -\pi$. Nehmen wir speziell $z = \pi$, so vereinfacht sich die Formel sehr und giebt:

$$\frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} = \pi - \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} \cdot 2_1 \pi + \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 4_2 \pi$$
$$- \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 6_3 \pi + \ldots$$

Statt der Binomialcoeffizienten 2_1, 4_2, 6_3 etc. kann man noch ihre Werthe setzen und dann geht die Gleichung in die folgende über:

$$\frac{\sin \lambda\pi}{\lambda\pi} = 1 - \frac{\lambda^2}{1^2} + \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 1^2)}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 2^2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \ldots$$

oder auch

$$(10) \quad \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda\pi} = 1 - \frac{\lambda^2}{1^2} - \frac{\lambda^2(1^2 - \lambda^2)}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{\lambda^2(1^2 - \lambda^2)(2^2 - \lambda^2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} - \ldots$$

Da λ völlig willkührlich ist, so kann $\lambda\pi$ jeden beliebigen Bogen x bedeuten; setzt man demgemäfs $\lambda\pi = x$, folglich $\lambda = \frac{x}{\pi}$, so ergiebt sich

$$(11) \quad \frac{\sin x}{x}$$
$$= 1 - \frac{x^2}{(1\pi)^2} - \frac{x^2[(1\pi)^2 - x^2]}{(1\pi)^2(2\pi)^2} - \frac{x^2[(1\pi)^2 - x^2][(2\pi)^2 - x^2]}{(1\pi)^2(2\pi)^2(3\pi)^2} - \ldots$$

Von dieser Formel werden wir bald eine wichtige Anwendung kennen lernen.

§. 68.

Produkte für die Sinus und Cosinus vielfacher Bögen.

Wir haben in Cap. V. gesehen, dafs jede ganze rationale algebraische Funktion einer Variabelen z in ein Produkt verwandelt werden kann, sobald sich diejenigen Spezialwerthe z_1, z_2, z_3 etc. von z finden lassen, für welche die Funktion verschwindet. Ist nämlich einerseits

$$(1) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_m z^m$$

und sind die Werthe $z_1, z_2, z_3, \ldots z_m$ so beschaffen, dafs $f(z_1) = f(z_2) = f(z_3) \ldots = f(z_m) = 0$ wird, so hat man auch

$$(2) \qquad f(z) = a_m (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \ldots (z - z_m)$$

Dieses Theorem gestattet eine brauchbare Anwendung auf die Sätze des §. 66., wenn in diesen μ als ganze Zahl m genommen wird. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich

für gerade m:

$$(3) \qquad \cos mx = 1 - \frac{m^2}{1.2}\sin^2 x + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{m^2(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1.2.3.4\ldots m}\sin^m x$$

$$(4) \qquad \frac{\sin mx}{\sin x \cos x} = \frac{m}{1} - \frac{m(m^2-2^2)}{1.2.3}\sin^2 x + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{m}{2}-1} \frac{m(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1.2.3.4\ldots(m-1)}\sin^{m-2} x$$

und für ungerade m:

$$(5) \qquad \frac{\sin mx}{\sin x} = \frac{m}{1} - \frac{m(m^2-1^2)}{1.2.3}\sin^2 x + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m(m^2-1^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1.2.3.4\ldots m}\sin^{m-1} x$$

$$(6) \qquad \frac{\cos mx}{\cos x} = 1 - \frac{m^2-1^2}{1.2}\sin^2 x + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1.2.3.4\ldots(m-1)}\sin^{m-1} x$$

und wenn man auf der rechten Seite jedesmal z für $\sin x$ schreibt, so bilden die hier vorkommenden Reihen ganze und rationale algebraische Funktionen von z, wie es das vorhin erwähnte Theorem voraussetzt. Die Werthe z_1, z_2, z_3 u. s. f., welche die rechten Seiten unserer Gleichungen zum Verschwinden bringen, sind nun, da überhaupt $z = \sin x$ war, selbst wieder die Sinus gewisser Bögen $x_1, x_2, x_3, \ldots$, und wenn man die letzteren finden kann, so bestimmen sich die Spezialwerthe von z nach den Formeln $z_1 = \sin x_1$, $z_2 = \sin x_2$ etc. Um aber die Bögen x_1, x_2, x_3 u. s. w. zu ermitteln, bedarf es nur der einfachen Bemerkung, dafs die linke Seite in jeder der vorigen Gleichungen mit der rechten Seite gleichzeitig verschwindet. Die spezielle Betrachtung der einzelnen Formeln ist nun folgende.

I. Nach den obigen Bemerkungen und zufolge der Formel (2) darf man statt der dritten Gleichung die folgende setzen:

$$(7) \qquad \cos mx = a_m(\sin x - \sin x_1)(\sin x - \sin x_2) \ldots (\sin x - \sin x_m)$$

wobei für a_m zu setzen ist:

$$(-1)^{\frac{m}{2}}\,\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\dots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\dots m}$$

Zerlegt man jeden Faktor des Zählers nach dem Schema $m^2-k^2 = (m+k)(m-k)$ und ordnet die nunmehrigen Faktoren des Zählers nach ihrer Gröfse, so findet man ohne Mühe

$$a_m = (-1)^{\frac{m}{2}}\,.\,\frac{1}{2}\,\frac{2\,.\,4\,.\,6\dots(m-2)\,m(m+2)\dots(2m-2)(2m)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\dots m}$$

d. i. nach Hebung des Nenners

$$a_m = (-1)^{\frac{m}{2}}\,.\,\frac{1}{2}\,2^m = (-1)^{\frac{m}{2}}\,2^{m-1}$$

und so ist nun zufolge von No. (7)

$$(8)\quad \cos mx = (-1)^{\frac{m}{2}}\,2^{m-1}(\sin x-\sin x_1)(\sin x-\sin x_2)\dots(\sin x-\sin x_m).$$

Die Spezialwerthe von x, für welche beide Seiten der vorstehenden Gleichung verschwinden, sind

$$+\frac{\pi}{2m},\ +\frac{3\pi}{2m},\ +\frac{5\pi}{2m},\ \dots,\ +\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}$$

$$-\frac{\pi}{2m},\ -\frac{3\pi}{2m},\ -\frac{5\pi}{2m},\ \dots,\ -\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}$$

und die Anzahl derselben beträgt m, wie man leicht bemerken wird. Setzen wir diese Gröfsen der Reihe nach für $x_1, x_2, \dots x_m$, so ist nach (5)

$$\cos mx$$

$$= (-1)^{\frac{m}{2}}\,2^{m-1}\left(\sin x-\sin\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin x-\sin\frac{3\pi}{2m}\right)\dots\left(\sin x-\sin\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}\right)$$

$$\times\left(\sin x+\sin\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin x+\sin\frac{3\pi}{2m}\right)\dots\left(\sin x+\sin\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}\right)$$

und diefs gilt für jedes gerade m. Durch Vereinigung je zwei über einander stehender Faktoren ergiebt sich weiter

$$\cos mx$$

$$= (-1)^{\frac{m}{2}}\,2^{m-1}\left(\sin^2 x-\sin^2\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin^2 x-\sin^2\frac{3\pi}{2m}\right)\dots\left(\sin^2 x-\sin^2\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}\right)$$

wo nun die Anzahl der Parenthesen rechts $\frac{m}{2}$ beträgt. Vertheilt man auf diese die $\frac{m}{2}$ negativen Einheiten, so wird jeder der Faktoren negativ und es ist

$$\cos mx$$
$$= 2^{m-1}\left(\sin^2\frac{\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\ldots\left(\sin^2\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m} - \sin^2 x\right)$$

Da diefs für jedes beliebige x gilt, so können wir auch $x = 0$ setzen, woraus folgt

$$(9)\qquad 1 = 2^{m-1}\sin^2\frac{\pi}{2m}\sin^2\frac{3\pi}{2m}\ldots\sin^2\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}$$

eine sehr bemerkenswerthe Relation.

Dividiren wir mit dieser Gleichung in die vorhergehende, so erhalten wir

$$(10)\qquad \cos mx$$
$$= \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\ldots\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}}\right)$$

wobei rechts die Anzahl der Faktoren $\frac{m}{2}$ beträgt und m eine gerade Zahl sein mufs.

II. Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch auf die Gleichung (4) anwenden. Es folgt nämlich aus dem Früheren unmittelbar, dafs man setzen darf

$$\frac{\sin mx}{\sin x\cos x}$$
$$= (-1)^{\frac{m}{2}-1}\,\frac{m(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}(\sin x - \sin x_1)\ldots(\sin x - \sin x_{m-2})$$

Der Coeffizient des Produktes ist einfacher

$$\frac{m\,(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)} = 2^{m-1},$$

wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man die Gröfsen m^2-2^2, m^2-4^2, $\ldots\; m^2-\overline{m-2}^2$ in Faktoren zerlegt; demnach hat man

$$\frac{\sin mx}{\sin x\cos x}$$
$$= (-1)^{\frac{m-2}{2}}\cdot 2^{m-1}(\sin x - \sin x_1)(\sin x - \sin x_2)\ldots(\sin x - \sin x_{m-2})$$

Es sind nun noch die Werthe $x_1, x_2, \ldots x_{m-2}$ zu bestimmen, für welche die rechte Seite in (5) sich annullirt, für welche also auch $\sin mx = 0$ sein mufs. Aus der letzten Bemerkung findet man dieselben als die folgenden:

$$+\frac{2\pi}{2m},\ +\frac{4\pi}{2m},\ +\frac{6\pi}{2m},\ \ldots\ +\frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}$$
$$-\frac{2\pi}{2m},\ -\frac{4\pi}{2m},\ -\frac{6\pi}{2m},\ \ldots\ -\frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}$$

Mithin ist jetzt

$$\frac{\sin mx}{\sin x\ \cos x}$$
$$=(-1)^{\frac{m-2}{2}}\cdot 2^{m-1}\left(\sin x-\sin\frac{2\pi}{2m}\right)\left(\sin x-\sin\frac{4\pi}{2m}\right)\ldots\left(\sin x-\sin\frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}\right)$$
$$\times\left(\sin x+\sin\frac{2\pi}{2m}\right)\left(\sin x+\sin\frac{4\pi}{2m}\right)\ldots\left(\sin x+\sin\frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}\right)$$

wobei rechts $m-2$ Faktoren vorhanden sind. Durch Vereinigung je zweier Faktoren wird

$$\frac{\sin mx}{\sin x\ \cos x}$$
$$=(-1)^{\frac{m-2}{2}}\cdot 2^{m-1}\left(\sin^2 x-\sin^2\frac{2\pi}{2m}\right)\left(\sin^2 x-\sin^2\frac{4\pi}{2m}\right)\ldots\left(\sin^2 x-\sin^2\frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}\right)$$

wo blos noch $\frac{m-2}{2}$ Faktoren in Parenthesen vorhanden sind. Vertheilt man die in $(-1)^{\frac{m-2}{2}}$ enthaltenen $m-2$ negativen Einheiten auf *dieselben*, so ist

$$\frac{\sin mx}{\sin x\ \cos x}$$
$$=2^{m-1}\left(\sin^2\frac{2\pi}{2m}-\sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{4\pi}{2m}-\sin^2 x\right)\ldots\left(\sin^2\frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}-\sin^2 x\right)$$

Läfst man hier x bis zur Gränze Null abnehmen und bemerkt, dafs $Lim\cos x=1$,

$$Lim\,\frac{\sin mx}{\sin x}=Lim\,\frac{\sin mx}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}=m$$

ist, so wird

$$(11)\qquad m=2^{m-1}\sin^2\frac{2\pi}{2m}\sin^2\frac{4\pi}{2m}\ldots\sin^2\frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}$$

Dividirt man mit dieser Gleichung in die vorhergehende, so erhält man

$$\frac{\sin mx}{m\sin x\ \cos x}$$
$$=\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{4\pi}{2m}}\right)\ldots\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}}\right).$$

oder

(12)
$$\frac{\sin mx}{\cos x}$$
$$= m\sin x\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{4\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}}\right)$$

eine Gleichung, welche der in (10) stehenden analog ist, nur für gerade m gilt und rechts $\frac{m-2}{2}$ eingeklammerte Faktoren enthält.

III. Berücksichtigt man, dafs die in No. (5) links vorkommende Funktion sich für die $m-1$ Werthe

$$\pm\frac{2\pi}{2m},\ \pm\frac{4\pi}{2m},\ \pm\frac{6\pi}{2m},\ \ldots\ \pm\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}$$

annullirt, so erhält man unter Anwendung des nämlichen Verfahrens leicht die folgende Relation:

(13)
$$\sin mx$$
$$= m\sin x\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{4\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}}\right)$$

welche nur für ungerade m gilt und rechts $\frac{m-1}{2}$ Faktoren des zweiten Grades enthält.

Ebenso leicht findet man aus der Gleichung (6) für ungerade m:

(14)
$$\frac{\cos mx}{\cos x}$$
$$=\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}}\right)$$

wobei rechts $\frac{m-2}{2}$ Faktoren des zweiten Grades stehen.

Läfst man in den Formeln (10), (12), (13) und (14) $\frac{x}{m}$ an die Stelle von x treten, so ergeben sich noch die folgenden vier Gleichungen:

Für ein gerades m:

(15)
$$\cos x$$
$$=\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}}\right)$$

wobei rechts $\frac{m}{2}$ Faktoren des zweiten Grades stehen;

(16)
$$\frac{\sin x}{\cos\frac{x}{m}} = m \sin\frac{x}{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{4\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{m-2\,\pi}{2m}}\right)$$

mit $\frac{m-2}{2}$ Faktoren des zweiten Grades.

Für ein ungerades m:

(17)
$$\sin x = m \sin\frac{x}{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{4\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{m-1\,\pi}{2m}}\right)$$

mit $\frac{m-1}{2}$ Faktoren, und

(18)
$$\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{m}} = \left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{m-2\,\pi}{m}}\right)$$

mit $\frac{m-2}{2}$ Faktoren.

Diese vier Formeln geben $\cos x$ und $\sin x$ mit Hülfe einer ganzen Zahl m, die aber beliebig ist und die Anzahl der Faktoren bestimmt.

Da nun die Formeln selbst gelten, wie groſs auch das m sein möge, so liegt der Gedanke nahe, m ins Unendliche wachsen zu lassen und somit $\cos x$ und $\sin x$ unter der Form unendlicher Produkte darzustellen. Bevor wir aber weiter auf diese Idee eingehen, schicken wir eine allgemeinere Untersuchung über unendliche Produkte überhaupt voraus; diese Vorarbeit ist hier aus denselben Gründen nöthig, aus welchen wir die allgemeine Betrachtung unendlicher Reihen dem Gebrauche derselben vorangehen lieſsen.

Capitel XVII.

Die unendlichen Produkte.

§. 69.

Die Convergenz und Divergenz unendlicher Produkte.

Das Produkt einer endlichen Anzahl von Faktoren ist eine bestimmte endliche Gröfse, so lange keiner der Faktoren unendlich wird; setzen wir also die Faktoren $w_0, w_1, w_2, \ldots w_{n-1}$, deren Anzahl n ist, sämmtlich als endliche Gröfsen voraus und nennen P_n ihr Produkt, so mufs auch P_n eine endliche bestimmte Gröfse sein. Dieser Schlufs gilt jedoch nicht mehr für eine unendliche Anzahl von Faktoren; denn es geht die Gleichung

(1) $$P_n = w_0 w_1 w_2 \ldots w_{n-1}$$

bei unendlich wachsenden n in die folgende über:

(2) $$Lim\, P_n = w_0 w_1 w_2 w_3 \ldots in\ inf.$$

und hier kann $Lim\, P_n$ ebensowohl eine bestimmte endliche Gröfse haben, als unendlich oder unbestimmt werden. Im ersten Falle nennt man das unendliche Produkt $w_0 w_1 w_2 \ldots$ convergent und, wenn P der Betrag von $Lim\, P_n$ ist, heifse P der Werth des unendlichen Produktes, was einfach durch

(3) $$P = w_0 w_1 w_2 w_3 \ldots$$

bezeichnet werden möge; im zweiten Falle hat das unendliche Produkt keinen bestimmten angebbaren Werth und heifst divergent.

Wie nun früher bei den unendlichen Reihen, so wird auch hier die Aufstellung eines Kennzeichens nöthig, nach welchem sich die Convergenz oder Divergenz eines gegebenen Produktes entscheiden läfst. Zu einem solchen Criterium gelangt man sehr leicht durch die Bemerkung, dafs die Gleichung (1) die folgende nach sich zieht:

$$lP_n = lw_0 + lw_1 + lw_2 + \ldots + lw_{n-1}$$

aus welcher für unendlich wachsende n folgt

(4) $$lP = lw_0 + lw_1 + lw_2 + lw_3 + \ldots$$

An diese knüpfen sich unmittelbar die drei Consequenzen: 1) convergirt die Reihe $lw_0 + lw_1 + lw_2 + \ldots$ und heifst s ihre Summe, so convergirt auch das Produkt $w_0 w_1 w_2 \ldots$ und sein Werth ist e^s; 2) divergirt die Reihe $lw_0 + lw_1 + lw_2 + \ldots$ jedoch so, dafs ihre Summe $= -\infty$ wird, so convergirt das Produkt $w_0 w_1 w_2 \ldots$ und sein Werth ist die Null; 3) divergirt die fragliche Reihe in der Weise, dafs ihre Summe $= +\infty$ oder gänzlich unbestimmt wird (wie z. B. $1 - 2 + 3 - 4 +$ etc.), so divergirt auch das in Rede stehende Produkt. — Obschon

es nach diesen Sätzen keine wesentliche Schwierigkeit haben würde, ein gegebenes Produkt auf seine Convergenz oder Divergenz zu prüfen, so ist es doch vortheilhaft, die obigen Criterien noch einer weiteren Betrachtung zu unterwerfen, deren Zweck auf eine Vereinfachung und mithin auf leichtere Anwendbarkeit jener Criterien gerichtet ist. Wir müssen defshalb vorerst eine Bemerkung über den Ausdruck $l(1+z)$ einschalten.

Bezeichnen wir mit ζ einen wesentlich positiven ächten Bruch, so ist bekanntlich

$$l(1+\zeta) = \zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 + \zeta^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\zeta + \frac{1}{5}\zeta^2 - \dots\right)$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe beträgt nun offenbar weniger als die der folgenden

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\zeta + \frac{1}{5}\zeta^2 + \dots$$

und also jedenfalls noch weniger als

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\zeta + \frac{1}{3}\zeta^2 + \dots = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\zeta}$$

wenn nun der Bruch $\zeta < \frac{2}{3}$ ist, so hat man $1 - \zeta > \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{1-\zeta} < 3$, mithin folgt jetzt

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\zeta + \frac{1}{5}\zeta^2 - \dots < 1$$

und wir können daher setzen

(5) $$l(1+\zeta) = \zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 + \zeta^3\alpha, \quad \zeta < \frac{2}{3}$$

wo α einen positiven ächten Bruch bezeichnet, auf dessen Werth es nicht weiter ankommt. Ganz analog ist weiter

$$l(1-\zeta) = -\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 - \zeta^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\zeta + \frac{1}{5}\zeta^2 + \dots\right)$$

und da wir aus dem Vorigen bereits wissen, dafs die eingeklammerte Reihe weniger als die Einheit ausmacht, wenn $\zeta < \frac{2}{3}$ ist, so folgt

$$l(1-\zeta) = -\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 - \zeta^3\beta, \quad \zeta < \frac{2}{3}$$

wo β wiederum einen positiven ächten Bruch bezeichnet. Schreiben wir die vorstehende Gleichung in der Form

$$l(1-\zeta) = (-\zeta) - \frac{1}{2}(-\zeta)^2 + (-\zeta)^3\beta$$

so können wir sie mit der unter No. (5) verzeichneten Beziehung zusam-

menfassen, indem wir sagen, für jedes ächt gebrochene z, dessen absoluter Werth weniger als $\frac{2}{3}$ beträgt, ist

$$(6) \qquad l(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \mu z^3$$

und dabei bezeichnet μ einen positiven ächten Bruch.

Um nun das unendliche Produkt $w_0 w_1 w_2 \ldots$ näher untersuchen zu können, geben wir ihm die Form

$$(7) \qquad (1+v_0)(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\ldots,$$

in welcher $v_0, v_1, v_2, \ldots$ noch ebenso beliebige Zahlen sind, wie vorhin $w_0, w_1, w_2 \ldots$, und beurtheilen die Convergenz oder Divergenz desselben durch Untersuchung der Reihe

$$(8) \qquad l(1+v_0) + l(1+v_1) + l(1+v_2) + \ldots$$

Damit dieselbe convergire, ist zunächst nothwendig, dafs ihre Glieder ins Unendliche abnehmen, also für unendlich wachsende n, $Lim\, l(1+v_n) = 0$ sei; daraus folgt sogleich, dafs $Lim\, v_n = 0$, mithin die Reihe der Zahlen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ ins Unendliche abnehmend sein mufs. Unter dieser Voraussetzung giebt es immer eine Stelle, von welcher ab die Glieder kleiner als $\frac{2}{3}$ bleiben; nennen wir v_m die erste unter den Zahlen v_m, v_{m+1}, v_{m+2} etc., welche weniger als $\frac{2}{3}$ betragen, so ist nach No. (6)

$$(9) \qquad \begin{aligned} l(1+v_m) + l(1+v_{m+1}) + l(1+v_{m+2}) + \ldots \\ = v_m + v_{m+1} + v_{m+2} + \ldots \\ - \frac{1}{2}[v_m^2 + v_{m+1}^2 + v_{m+2}^2 + \ldots] \\ + \mu_0 v_m^3 + \mu_1 v_{m+1}^3 + \mu_2 v_{m+2}^3 + \ldots \end{aligned}$$

wo $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ verschiedene positive ächte Brüche bezeichnen, auf deren Werthe es nicht näher ankommt. Wir unterscheiden nun zwei Hauptfälle, ob nämlich die Gröfsen $v_m, v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots$ durchaus gleiche Vorzeichen haben, oder ob sie Zeichenwechsel bilden.

Wenn im ersten Falle die Reihe $v_m + v_{m+1} + v_{m+2} + \ldots$ convergirt, so convergiren die Reihen

$$v_m^2 + v_{m+1}^2 + v_{m+2}^2 + \ldots$$
$$\mu_0 v_m^3 + \mu_1 v_{m+1}^3 + \mu_2 v_{m+2}^3 + \ldots$$

offenbar um so stärker, weil ihre einzelnen Glieder kleiner als die entsprechenden Glieder der ersten Reihe sind; hieraus folgt auf der Stelle nach No. (9) die Convergenz der Reihe linker Hand und mithin auch die des Produktes

$$(1+v_m)(1+v_{m+1})(1+v_{m+2})\ldots$$

Setzen wir zu diesem Produkte noch das folgende

$$(1+v_0)(1+v_1)(1+v_2)\dots(1+v_{m-1})$$

hinzu, so ergiebt sich folgendes Theorem:

Die Convergenz der aus Gliedern von durchweg gleichen Vorzeichen gebildeten Reihe:

$$v_0+v_1+v_2+v_3+\dots$$

bedingt die Convergenz des Produktes:

$$(1+v_0)(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\dots$$

und zwar ist der Werth desselben von Null verschieden.

Hieraus folgt z. B. auf der Stelle, dafs die unendlichen Produkte

$$(10)\qquad \left(1-\frac{a^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{3^2}\right)\dots$$

$$(11)\qquad \left(1+\frac{a^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{a^2}{2^2}\right)\left(1+\frac{a^2}{3^2}\right)\dots$$

convergiren und zwar gegen Werthe, die von Null verschieden sind, wenn nicht zufällig einer der Faktoren selbst gleich Null ist.

Etwas anders gestaltet sich die Sache, wenn die fallende Reihe v_m, v_{m+1}, v_{m+2}, ... wechselnde Vorzeichen besitzt, also eo ipso convergirt. Dann ist zwar auch die Reihe

$$\mu_0 v_m^3+\mu_1 v_{m+1}^3+\mu_2 v_{m+2}^3+\dots$$

convergent, weil sie dieselben Zeichenwechsel und kleinere Glieder wie jene besitzt, dagegen versteht es sich nicht von selbst, dafs die Reihe

$$v_m^2+v_{m+1}^2+v_{m+2}^2+\dots$$

convergirt, weil sie durchaus gleiche Vorzeichen hat; so ist z. B. von den drei Reihen

$$\frac{1}{\sqrt{m}}-\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\frac{1}{\sqrt{m+2}}-\dots$$

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\dots$$

$$\frac{\mu_0}{\sqrt{m}^3}-\frac{\mu_1}{\sqrt{m+1}^3}+\frac{\mu_2}{\sqrt{m+2}^3}-\dots$$

die erste sowohl als die dritte convergent, die zweite aber divergent. In diesem Falle erhält man aus der Gleichung (9) folgendes Theorem:

Wenn die beiden Reihen

$$v_0+v_1+v_2+v_3+\dots$$
$$v_0^2+v_1^2+v_2^2+v_3^2+\dots$$

gleichzeitig convergiren, so convergirt das Produkt

$$(1+v_0)(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\dots$$

gegen einen von Null verschiedenen Werth; wenn dagegen die erste

Reihe convergirt und die zweite divergirt, so convergirt das fragliche Produkt gegen den Werth Null.

Dieser Regel zufolge convergirt das Produkt

$$\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\left(1-\frac{a}{4}\right)\dots$$

gegen einen von Null verschiedenen Werth, und das Produkt

$$\left(1+\frac{a}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{a}{\sqrt{4}}\right)\dots$$

gegen den Werth Null. — Will man die beiden gefundenen Theoreme in ein einziges zusammenziehen, was für die Anwendung am bequemsten ist, so kann man sich folgendermafsen ausdrücken:

Sobald die unendliche Reihe

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

convergirt, so convergirt auch das unendliche Produkt

$$(1+v_0)(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\dots$$

und zwar ist der Werth desselben von Null verschieden oder gleich Null, jenachdem die unendliche Reihe

$$v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots$$

convergirt oder divergirt.

Wir haben bisher immer die Convergenz der fallenden Reihe v_0, v_1, v_2, ... vorausgesetzt, und es wäre daher noch zu untersuchen, wie sich der Werth des Produktes gestaltet, sobald jene Reihe divergirt. Im Allgemeinen lassen sich nun hierüber keine Theoreme aufstellen, weil die Divergenz der Reihe v_0, v_1, v_2, ... weder die Convergenz noch die Divergenz der Reihen v_0^2, v_1^2, v_2^2 etc. und v_0^3, v_1^3, v_2^3 etc. nothwendig bedingt; es bedarf dann jedes gegebene spezielle Produkt einer Untersuchung für sich, die mittelst der Gleichung (9) weiter keine Schwierigkeiten darbietet. Ist z. B. das Produkt

$$\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\left(1+\frac{a}{4}\right)\dots$$

gegeben und $\frac{a}{m}$ der erste Quotient, welcher weniger als $\frac{2}{3}$ beträgt, so folgt nach No. (9)

$$l\left(1+\frac{a}{m}\right)+l\left(1+\frac{a}{m+1}\right)+l\left(1+\frac{a}{m+2}\right)+\dots$$

$$=a\left[\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\dots\right]$$

$$-\frac{1}{2}a^2\left[\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\dots\right]$$

$$+a^3\left[\frac{\mu_0}{m^3}+\frac{\mu_1}{(m+1)^3}+\frac{\mu_2}{(m+2)^3}+\dots\right]$$

Von den Reihen rechter Hand ist die erste divergent, die zweite und ebenso die dritte convergent; man hat demnach für positive a

$$l\left[\left(1+\frac{a}{m}\right)\left(1+\frac{a}{m+1}\right)\left(1+\frac{a}{m+2}\right)\ldots\right]=\infty$$

und mithin divergirt das obige Produkt, indem es unendlich wächst. Auf ganz gleiche Weise würde man finden

$$l\left[\left(1-\frac{a}{m}\right)\left(1-\frac{a}{m+1}\right)\left(1-\frac{a}{m+2}\right)\ldots\right]=-\infty$$

und hieraus erkennen, dafs das unendliche Produkt

$$\left(1-\frac{a}{1}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right)\left(1-\frac{a}{3}\right)\left(1-\frac{a}{4}\right)\ldots$$

gegen den Werth Null convergirt. — Ähnlicher Schlüsse kann man sich in allen anderen Fällen bedienen.

§. 70.

Transformation der Reihen in Produkte und umgekehrt.

I. Es giebt ein sehr einfaches Mittel, um Reihen wie

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots$$

in Produkte umzusetzen, sobald man im Stande ist, die einzelnen Summen

$$u_0, \quad u_0+u_1, \quad u_0+u_1+u_2, \quad \text{u. s. w.}$$

aufzufinden; man hat nämlich offenbar die identische Gleichung

(1)
$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1}$$
$$=\frac{u_0}{1}\cdot\frac{u_0+u_1}{u_0}\cdot\frac{u_0+u_1+u_2}{u_0+u_1}\cdots\frac{u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}}{u_0+u_1+\ldots+u_{n-2}}$$

in welcher sich rechter Hand jeder Nenner gegen den folgenden Zähler hebt und die Anzahl der Faktoren gleich der Gliederanzahl linker Hand ist. Da die obige Gleichung nie zu gelten aufhört, wie grofs auch n genommen wird, so bleibt dieselbe auch dann noch richtig, wenn man n unendlich wachsen läfst; es ist dann

(2)
$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots$$
$$=\frac{u_0}{1}\cdot\frac{u_0+u_1}{u_0}\cdot\frac{u_0+u_1+u_2}{u_0+u_1}\cdot\frac{u_0+u_1+u_2+u_3}{u_0+u_1+u_2}\cdots$$

Trotz seiner grofsen Einfachheit ist dieses Verfahren doch häufig von wesentlichem Vortheile, wie wir an dem folgenden Beispiele zeigen wollen.

Die gegebene Reihe sei die in Formel (10) §. 67. vorkommende

(3) $$1-\frac{\lambda^2}{1^2}-\frac{\lambda^2(1^2-\lambda^2)}{1^2.2^2}-\frac{\lambda^2(1^2-\lambda^2)(2^2-\lambda^2)}{1^2.2^2.3^2}-\ldots$$

so finden die Gleichungen statt:

$$u_0 = 1$$

$$u_0 + u_1 = \frac{1^2 - \lambda^2}{1^2}$$

$$u_0 + u_1 + u_2 = \frac{(1^2 - \lambda^2)(2^2 - \lambda^2)}{1^2 . 2^2}$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = \frac{(1^2 - \lambda^2)(2^2 - \lambda^2)(3^2 - \lambda^2)}{1^2 . 2^2 . 3^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und hieraus ergiebt sich nach Formel (2) auf der Stelle, dafs die obige Reihe mit dem unendlichen Produkte

$$\frac{1^2 - \lambda^2}{1^2} . \frac{2^2 - \lambda^2}{2^2} . \frac{3^2 - \lambda^2}{3^2} . \frac{4^2 - \lambda^2}{4^2} \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\lambda^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{4^2}\right)\cdots$$

einerlei ist. Andererseits war aber die Summe jener Reihe bekannt, nämlich $= \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda\pi}$, und so folgt nun das schöne Resultat

$$(4) \qquad \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda\pi} = \left(1 - \frac{\lambda^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{3^2}\right)\cdots$$

welches für jedes λ gültig ist. Durch die Supposition $\lambda\pi = x$, also $\lambda = \frac{x}{\pi}$, ergiebt sich noch die Formel

$$(5) \qquad \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

der zufolge jeder Sinus in der Gestalt eines unendlichen Produktes dargestellt werden kann. Ein Gleiches gilt von dem Cosinus; läfst man nämlich $\frac{x}{2}$ an die Stelle von x treten, so ist auch

$$(6) \qquad \sin \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{6^2\pi^2}\right)\cdots$$

und aus den Gleichungen (5) und (6) folgt jetzt, indem man von der Formel

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

Gebrauch macht, die analoge Cosinusformel

$$(7) \qquad \cos \frac{x}{2} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots$$

und ebenso

$$(8) \qquad \cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots$$

Zu diesen Ergebnissen kann man auch dadurch gelangen, dafs man in den am Ende des vorigen Capitels verzeichneten Gleichungen die Zahl n ins Unendliche wachsen läfst.

Will man die in den obigen Formeln vorkommenden Faktoren zweiten Grades durch Faktoren ersten Grades ersetzen, so ist auch:

(9) $$\sin x$$
$$= x\left(1-\frac{x}{1\pi}\right)\left(1+\frac{x}{1\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots$$

(10) $$\cos x$$
$$= \left(1-\frac{2x}{1\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{1\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{5\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{5\pi}\right)\cdots$$

Die Formel (9) kann unter Andern auch zur Entwickelung unendlicher Produkte für die Ludolph'sche Zahl dienen, sobald man nämlich dem Bogen x einen solchen Werth giebt, dafs der Betrag von $\sin x$ unmittelbar bekannt ist; so erhält man für $x = \frac{\pi}{2}$

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdots\cdots$$

oder umgekehrt

(11) $$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots\cdots$$

und auf ähnliche Weise für $x = \frac{\pi}{4}$

(12) $$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{16}{17} \cdots\cdots$$

Durch Combination der Formeln (5) und (8) oder (9) und (10) liefsen sich endlich auch für $\tan x$ und $\cot x$ unendliche Produkte gewinnen; überhaupt kann man jetzt allgemeiner sagen, dafs die sechs goniometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\tan x$, $\cot x$ unter der Form unendlicher Produkte darstellbar sind.

II. Die identische Gleichung (1), welche die Verwandlung einer Reihe in ein Produkt andeutet, kann auch umgekehrt zur Transformation eines Produktes in eine Reihe benutzt werden; setzt man nämlich

$$\frac{u_0}{1} = w_0$$
$$\frac{u_0 + u_1}{u_0} = w_1$$
$$\frac{u_0 + u_1 + u_2}{u_0 + u_1} = w_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so giebt die Auflösung dieser Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_0 &= w_0 \\ u_1 &= w_0 (w_1 - 1) \\ u_2 &= w_0 w_1 (w_2 - 1) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

und die Formel (1) gestaltet sich jetzt bei umgekehrter Anordnung wie folgt:

$$(13) \qquad \begin{aligned} & w_0 w_1 w_2 \dots w_{n-1} \\ = & w_0 + w_0 (w_1 - 1) + w_0 w_1 (w_2 - 1) + \dots \\ & \dots + w_0 w_1 \dots w_{n-2} (w_{n-1} - 1) \end{aligned}$$

Diese sehr einfache Formel, von deren Richtigkeit man sich auch durch Entwickelung der rechts stehenden Produkte unmittelbar überzeugen kann, kann nun zu dem oben angedeuteten Zwecke benutzt werden; für unendlich wachsende n ist noch:

$$(14) \qquad \begin{aligned} & w_0 w_1 w_2 w_3 \dots \\ = & w_0 + w_0 (w_1 - 1) + w_0 w_1 (w_2 - 1) + w_0 w_1 w_2 (w_3 - 1) + \dots \end{aligned}$$

Um ein Beispiel zu haben, sei

$$w_0 = \frac{\beta}{\alpha}, \quad w_1 = \frac{\beta + 1}{\alpha + 1}, \quad w_2 = \frac{\beta + 2}{\alpha + 2}, \dots$$

man findet dann auf der Stelle:

$$(15) \qquad \begin{aligned} & \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\beta + 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{\beta + 2}{\alpha + 2} \cdot \frac{\beta + 3}{\alpha + 3} \dots \\ = & \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\alpha + 1} + \frac{\beta(\beta + 1)}{\alpha(\alpha + 1)} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\alpha + 2} + \dots \\ = & 1 + \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \left[1 + \frac{\beta}{\alpha + 1} + \frac{\beta(\beta + 1)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} + \frac{\beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)} + \dots \right] \end{aligned}$$

Hier lassen sich die drei Fälle $\beta = \alpha$, $\beta > \alpha$ und $\beta < \alpha$ unterscheiden, wenn wir dabei α und β als positive Zahlen betrachten. Im ersten Falle divergirt die Reihe rechter Hand, im zweiten Falle findet offenbar eine noch stärkere Divergenz statt, und wir müssen uns daher, wenn wir das nichtssagende Resultat $\infty = \infty$ vermeiden wollen, auf den Fall $\beta < \alpha$ beschränken. Wir geben dann der Gleichung (15) die Form

$$(16) \qquad \begin{aligned} & \left(1 - \frac{\alpha - \beta}{\alpha}\right) \left(1 - \frac{\alpha - \beta}{\alpha + 1}\right) \left(1 - \frac{\alpha - \beta}{\alpha + 2}\right) \dots \\ = & 1 - \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \left[1 + \frac{\beta}{\alpha + 1} + \frac{\beta(\beta + 1)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} + \frac{\beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)} + \dots \right] \end{aligned}$$

und untersuchen die linke Seite mittelst der Formel

$$l(1 - \zeta) = -\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 - \mu\zeta^3, \quad \zeta < \frac{2}{3}$$

Es ist dann, wenn m so grofs genommen wird, dafs $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+m}<\frac{2}{3}$ ausfällt,

$$l\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+m}\right)+l\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+m+1}\right)+l\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+m+2}\right)+\ldots$$
$$=-(\alpha-\beta)\left[\frac{1}{\alpha+m}+\frac{1}{\alpha+m+1}+\frac{1}{\alpha+m+2}+\ldots\right]$$
$$-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2\left[\frac{1}{(\alpha+m)^2}+\frac{1}{(\alpha+m+1)^2}+\frac{1}{(\alpha+m+2)^2}+\ldots\right]$$
$$-(\alpha-\beta)^3\left[\frac{\mu_0}{(\alpha+m)^3}+\frac{\mu_1}{(\alpha+m+1)^3}+\frac{\mu_2}{(\alpha+m+2)^3}+\ldots\right]$$

Hier divergirt die erste Reihe rechter Hand, die zweite und dritte convergiren, mithin ist

$$l\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+m}\right)+l\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+m+1}\right)+l\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+m+2}\right)+\ldots=-\infty$$
$$\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+m}\right)\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+m+1}\right)\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+m+2}\right)\ldots=0$$

und folglich auch der Werth des in No. (16) verzeichneten Produktes gleich Null. Hierdurch wird die Convergenz der rechter Hand stehenden Reihe bedingt, und in der That kann man sich direkt durch das Kriterium in §. 32, II. hiervon überzeugen. Die Gleichung (18) giebt nun unter der Bedingung $\alpha>\beta$

$$\frac{\alpha}{\alpha-\beta}=1+\frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\ldots$$

oder für $\alpha=a-1$ und $\beta=b$, wo $a-1>b$ oder $a>b+1$ sein mufs,

$$\frac{a-1}{a-b-1}=1+\frac{b}{a}+\frac{b(b+1)}{a(a+1)}+\frac{b(b+1)(b+2)}{a(a+1)(a+2)}+\ldots$$

Durch ein ähnliches Verfahren kann man leicht noch viele derartige Reihenformeln aus der Betrachtung unendlicher Produkte herleiten.

Capitel XVIII.

Die Bernoulli'schen Zahlen und die Sekantencoeffizienten.

§. 71.

Die Bernoulli'schen Zahlen.

Als Ausgangspunkt für eine weitere Untersuchung wählen wir die Gleichung

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

indem wir von beiden Seiten derselben die Logarithmen nehmen und letztere nach bereits bekannten Formeln weiter entwickeln. Setzen wir $x < \pi$ voraus, so sind sämmtliche Logarithmen rechter Hand reel, und wenn wir auf jeden derselben die Formel

$$l(1 - z^2) = -z^2 - \frac{1}{2}z^4 - \frac{1}{3}z^6 - \cdots$$

$$1 > z > -1$$

anwenden, was unter der vorigen Beschränkung erlaubt ist, so folgt:

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= -\frac{x^2}{1^2\pi^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{1^4\pi^4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{1^6\pi^6} - \cdots$$

$$- \frac{x^2}{2^2\pi^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{2^4\pi^4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{2^6\pi^6} - \cdots$$

$$- \frac{x^2}{3^2\pi^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{3^4\pi^4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{3^6\pi^6} - \cdots$$

$$- \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

oder, wenn man diese Reihen in vertikaler Richtung zusammennimmt,

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= -\frac{x^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right)$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{\pi^6}\left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots\right)$$

$$- \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Bezeichnen wir die Summen der eingeklammerten convergenten Reihen mit S_2, S_4, S_6, ..., so dafs überhaupt für ein positives ganzes n

(1) $$S_{2n} = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots$$

ist, so haben wir unter der Bedingung $x < \pi$

(2) $$l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$= -\frac{x^2}{\pi^2} S_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{\pi^4} S_4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^6}{\pi^6} S_6 - \cdots$$

Man kann aber $l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ auch noch auf andere Weise in eine convergente Reihe verwandeln. Man hat nämlich

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{2.3}\left(1 - \frac{x^2}{4.5} + \frac{x^4}{4.5.6.7} - \cdots\right)$$

zugleich ist für $x < \pi$ der Quotient $\frac{\sin x}{x} < 1$ und positiv, folglich

$$\frac{x^2}{2.3}\left(1 - \frac{x^2}{4.5} + \frac{x^4}{4.5.6.7} - \cdots\right) < 1$$

mithin

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$= l\left[1 - \frac{x^2}{2.3}\left(1 - \frac{x^2}{4.5} + \frac{x^4}{4.5.6.7} - \cdots\right)\right]$$

und durch Verwandlung in eine Reihe

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$= -\frac{x^2}{2.3}\left(1 - \frac{x^2}{4.5} + \frac{x^4}{4.5.6.7} - \cdots\right)$$
$$- \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2.3}\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{4.5} + \frac{x^4}{4.5.6.7} - \cdots\right)^2$$
$$- \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x^2}{2.3}\right)^3 \left(1 - \frac{x^2}{4.5} + \frac{x^4}{4.5.6.7} - \cdots\right)^3$$
$$- \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Führt man die angedeuteten Erhebungen auf Potenzen wirklich aus und ordnet Alles nach Potenzen von x, so findet man

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$= -\frac{2x^2}{1.2} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3 x^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{30} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2^5 x^6}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{1}{42} - \cdots$$

Hier kommen gewisse rationale Brüche

$$\frac{1}{6},\quad \frac{1}{30},\quad \frac{1}{42},\quad \ldots$$

in den Coefficienten vor, deren Gesetz man nicht sogleich übersieht. Man nennt diese Zahlen, deren Bildungsgesetz wir später einsehen werden, die **Bernoulli'schen Zahlen** und bezeichnet sie mit B_1, B_3, B_5, ...*), so dafs

(3)
$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$= -\frac{2B_1 x}{1.2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2^3 B_3 x^4}{1.2.3.4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2^5 B_5 x^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots$$

ist. Vergleichen wir in (2) und (3) die Coefficienten gleicher Potenzen von x, so finden wir

$$\frac{1}{\pi^2}S_2 = \frac{2B_1}{1.2},\quad \frac{1}{\pi^4}S_4 = \frac{2^3 B_3}{1.2.3.4},\quad \frac{1}{\pi^6}S_6 = \frac{2^5 B_5}{1.2.3.4.5.6},\ \ldots$$

folglich

$$S_2 = \frac{2B_1}{1.2}\pi^2,\quad S_4 = \frac{2^3 B_3}{1.2.3.4}\pi^4,\quad S_6 = \frac{2^5 B_5}{1.2.3.4.5.6}\pi^6,\ \ldots$$

überhaupt

$$S_{2n} = \frac{2^{2n-1} B_{2n-1}\pi^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)}$$

d. i. nach Formel (1)

(4)
$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots = \frac{2^{2n-1} B_{2n-1}\pi^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)}.$$

Diese Gleichung zeigt einerseits, dafs die Summe der reciproken geraden Potenzen aller natürlichen Zahlen gleich ist einer Potenz von der Ludolphischen Zahl, multiplizirt mit einem gewissen rationalen Bruche; andererseits könnte man sie zur Berechnung der Bernoulli'schen Zahlen brauchen. Diefs Letztere wäre jedoch sehr unbequem; wir werden später eine leichtere Methode kennen lernen.

Dividirt man beiderseits in (4) mit 2^{2n}, so kommt:

(5)
$$\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \ldots = \frac{B_{2n-1}\pi^{2n}}{2.1.2.3\ldots(2n)},$$

zieht man diefs von (4) ab, so findet sich leicht

(6)
$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \ldots = \frac{(2^{2n}-1)B_{2n-1}\pi^{2n}}{2.1.2.3\ldots(2n)},$$

wodurch auch die Summen der reciproken geraden Potenzen der succes-

*) Manche bezeichnen sie mit B_1, B_2, B_3 etc. Die obige Weise ist aber wegen der ähnlichen Sekantencoefficienten vorzuziehen.

siven ungeraden Zahlen gefunden werden können; z. B. für $n = 1$, weil $B_1 = \frac{1}{6}$,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

§. 72.

Einführung complexer Zahlen in die unendlichen Produkte für den Sinus und Cosinus.

Die Gleichungen (5) und (8) in §. 70. können als blose Transformationen der Formeln

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots$$

$$sin\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots$$

angesehen werden. In der That würde man auch durch wirkliche Ausführung der dort angedeuteten Multiplikationen bei Anwendung des numerischen Werthes von π finden:

$$cos\, x = 1 - 0{,}5 \cdot x^2 + 0{,}041666 \ldots x^4 - \ldots$$

$$sin\, x = x - 0{,}1666 \ldots x^3 + 0{,}00833 \ldots x^5 - \ldots$$

was von dem Vorigen nicht verschieden ist.

Die vorstehenden Formeln gelten aber auch für ein imaginäres $x = vi$, wenn man

$$cos\,(vi) = \frac{e^v + e^{-v}}{2}, \quad sin\,(vi) = \frac{e^v - e^{-v}}{2}\, i$$

nimmt. Es müssen folglich auch die Gleichungen (8) und (5) in §. 70. für $x = vi$ richtig bleiben. Man erhält dann

$$(1) \quad \frac{e^v + e^{-v}}{2} = \left(1 + \frac{4v^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4v^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4v^2}{5^2\pi^2}\right) \ldots$$

$$(2) \quad \frac{e^v - e^{-v}}{2} = v\left(1 + \frac{v^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{v^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{v^2}{3^2\pi^2}\right) \ldots$$

Diese Formeln könnten zur Berechnung von e^v dienen. Nachdem nämlich für ein gegebenes v der Werth des jedesmaligen Produktes rechts berechnet worden ist, steht rechts eine bekannte Gröfse k; für $e^v = z$ ist dann $e^{-v} = \frac{1}{z}$, und folglich wäre dann noch die quadratische Gleichung $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = k$ oder $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) = k$ aufzulösen.

Der ausgesprochene Gedanke von der Einführung imaginärer Gröfsen läfst sich aber noch in gröfserer Allgemeinheit ausführen und zwar auf folgende Weise:

I. Aus der Gleichung (9) in §. 70. folgt, wenn man beiderseits die natürlichen Logarithmen nimmt:

$$\begin{aligned} & l\sin x \\ = & lx + l\left(\frac{1\pi - x}{1\pi}\right) + l\left(\frac{1\pi + x}{1\pi}\right) + l\left(\frac{2\pi - x}{2\pi}\right) + l\left(\frac{2\pi + x}{2\pi}\right) \\ & + l\left(\frac{3\pi - x}{3\pi}\right) + l\left(\frac{3\pi + x}{3\pi}\right) + \dots \end{aligned}$$

und wenn man $x = u + vi$ nimmt:

$$\begin{aligned} (3)\qquad & l\sin(u + vi) \\ = & l(u+vi) + l\left(\frac{1\pi - u}{1\pi} - \frac{vi}{1\pi}\right) + l\left(\frac{1\pi + u}{1\pi} + \frac{vi}{1\pi}\right) \\ & + l\left(\frac{2\pi - u}{2\pi} - \frac{vi}{2\pi}\right) + l\left(\frac{2\pi + u}{2\pi} + \frac{vi}{2\pi}\right) \\ & + l\left(\frac{3\pi - u}{3\pi} - \frac{vi}{3\pi}\right) + l\left(\frac{3\pi + u}{3\pi} + \frac{vi}{3\pi}\right) \\ & + \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Nun hat man nach Formel (8) in §. 59.

$$\begin{aligned} (4)\qquad & l\sin(u+vi) \\ = & \frac{1}{2}\, l\left(\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{4} - \frac{\cos 2u}{2}\right) + i\, Arctan\left(\frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}}\cot u\right) \end{aligned}$$

ferner nach Formel (13) in §. 58.

$$(5)\qquad l(x+yi) = \frac{1}{2}\, l(x^2+y^2) + i\, Arctan\,\frac{y}{x}$$

Zwei auf einander folgende Glieder in (3) sind von der Form

$$l\left(\frac{n\pi - u}{n\pi} - \frac{vi}{n\pi}\right),\qquad l\left(\frac{n\pi + u}{n\pi} + \frac{vi}{n\pi}\right)$$

worin n ganz und positiv ist; für diese findet man mittelst der so eben citirten Formel

$$\begin{aligned} (6)\qquad & l\left(\frac{n\pi - u}{n\pi} - \frac{vi}{n\pi}\right) \\ & = \frac{1}{2}\, l\left(\frac{\overline{n\pi - u}^{\,2} + v^2}{n^2\pi^2}\right) - i\, Arctan\,\frac{v}{n\pi - u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7)\qquad & l\left(\frac{n\pi + u}{n\pi} + \frac{vi}{n\pi}\right) \\ & = \frac{1}{2}\, l\left(\frac{\overline{n\pi + u}^{\,2} + v^2}{n^2\pi^2}\right) + i\, Arctan\,\frac{v}{n\pi + u} \end{aligned}$$

Führt man diese Gleichungen (4), (5), (6), (7), die beiden letzten für $n = 1, 2, 3, \dots$ in (3) ein, so wird

$$\frac{1}{2}\, l\left(\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{4}-\frac{\cos 2u}{2}\right)+i\, Arctan\left(\frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}}\cot u\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, l(u^2+v^2)+i\, Arctan\frac{v}{u}$$

$$+\frac{1}{2}\, l\left(\frac{\overline{1\pi-u}^2+v^2}{1^2\pi^2}\right)-i\, Arctan\frac{v}{1\pi-u}$$

$$+\frac{1}{2}\, l\left(\frac{\overline{2\pi-u}^2+v^2}{1^2\pi^2}\right)+i\, Arctan\frac{v}{1\pi+u}$$

$$+\frac{1}{2}\, l\left(\frac{\overline{2\pi-u}^2+v^2}{2^2\pi^2}\right)-i\, Arctan\frac{v}{2\pi-u}$$

$$+\frac{1}{2}\, l\left(\frac{\overline{2\pi+u}^2+v^2}{2^2\pi^2}\right)+i\, Arctan\frac{v}{2\pi+u}$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Vergleicht man hier die reellen und imaginären Theile auf beiden Seiten und bemerkt für den ersten, dafs aus einer Gleichung wie

$$\frac{1}{2}\, lA=\frac{1}{2}\, la+\frac{1}{2}\, lb+\frac{1}{2}\, lc+\ldots$$

immer folgt

$$A=abcd\ldots$$

so ergeben sich folgende Relationen:

(8)
$$\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{4}-\frac{\cos 2u}{2}$$

$$=(u^2+v^2)\left(\frac{\overline{1\pi-u}^2+v^2}{1^2\pi^2}\right)\left(\frac{\overline{1\pi+u}^2+v^2}{1^2\pi^2}\right)\left(\frac{\overline{2\pi-u}^2+v^2}{2^2\pi^2}\right)\left(\frac{\overline{2\pi+u}^2+v^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots$$

und

(9)
$$Arctan\left(\frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}}\cot u\right)$$

$$= Arctan\frac{v}{u}-Arctan\frac{v}{1\pi-u}+Arctan\frac{v}{1\pi+u}$$

$$-Arctan\frac{v}{2\pi-u}+Arctan\frac{v}{2\pi+u}$$

$$-\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

II. Eine ganz ähnliche Transformation ist auf die Gleichung (10) §. 70. anwendbar. Nachdem man beiderseits die natürlichen Logarithmen genommen hat, setzt man $x=u+vi$. Zufolge der in den §§. 58 und 59. entwickelten Lehren findet man links:

$$l\cos(u+vi)$$

$$=\frac{1}{2}\, l\left(\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{4}+\frac{\cos 2u}{2}\right)-i\, Arctan\left(\frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}}\tan u\right)$$

Alle Reihenglieder rechts sind von den Formen

$$l\left(\frac{n\pi-2u}{n\pi}-\frac{2vi}{n\pi}\right),\quad l\left(\frac{n\pi+2u}{n\pi}+\frac{2vi}{n\pi}\right),$$

worin n eine ungerade Zahl bedeutet.

Nach (6) und (7) hat man $2u$ und $2v$ für u und v gesetzt,

$$l\left(\frac{n\pi-2u}{n\pi}-\frac{2vi}{n\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\,l\left(\frac{\overline{n\pi-2u}^2+4v^2}{n^2\pi^2}\right)-i\,Arctan\,\frac{2v}{n\pi-2u}$$

und

$$l\left(\frac{n\pi+2u}{n\pi}+\frac{2vi}{n\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\,l\left(\frac{\overline{n\pi+2u}^2+4v^2}{n^2\pi^2}\right)+i\,Arctan\,\frac{2v}{n\pi+2u}$$

Substituirt man diese Werthe für $n = 1, 3, 5, \ldots$ und vergleicht dann die reellen und imaginären Theile beiderseits, so erhält man folgende Relationen:

(10)
$$\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{4}+\frac{\cos 2u}{2}$$

$$=\left(\frac{\overline{1\pi-2u}^2+4v^2}{1^2\pi^2}\right)\left(\frac{\overline{1\pi+2u}^2+4v^2}{1^2\pi^2}\right)\left(\frac{\overline{3\pi-2u}^2+4v^2}{3^2\pi^2}\right)\left(\frac{\overline{3\pi+2u}^2+4v^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

(11)
$$Arctan\left(\frac{e^v-e^{-v}}{e^v+e^{-v}}\tan u\right)$$

$$=Arctan\,\frac{2v}{1\pi-2u}-Arctan\,\frac{2v}{1\pi+2u}+Arctan\,\frac{2v}{3\pi-2u}$$

$$-Arctan\,\frac{2v}{3\pi+2u}+\cdots$$

welche die Analoga zu (8) und (9) sind.

Bemerkenswerth ist hier der Fall $u = v$. In (8) sind zwei auf einander folgende Faktoren

$$\left(\frac{\overline{n\pi-u}^2+v^2}{n^2\pi^2}\right)\left(\frac{\overline{n\pi+u}^2+v^2}{n^2\pi^2}\right)$$

für $v = u$ wird daraus

$$\left(\frac{n^2\pi^2+2u^2-2un\pi}{n^2\pi^2}\right)\left(\frac{n^2\pi^2+2u^2+2un\pi}{n^2\pi^2}\right)$$

$$=\frac{(n^2\pi^2+2u^2)^2-(2un\pi)^2}{n^4\pi^4}=1+\frac{2^2u^4}{n^4\pi^4}$$

folglich hat man aus (8) für $v = u$

$$(12)\qquad \frac{e^{2u}+e^{-2u}}{4}-\frac{\cos 2u}{2}$$
$$=2u^2\left(1+\frac{2^2u^4}{1^4\pi^4}\right)\left(1+\frac{2^2u^4}{2^4\pi^4}\right)\left(1+\frac{2^2u^4}{3^4\pi^4}\right)\cdots$$

Ebenso leicht erhält man aus (10) für $v=u$

$$(13)\qquad \frac{e^{2u}+e^{-2u}}{4}+\frac{\cos 2u}{2}$$
$$=\left(1+\frac{2^4u^4}{1^4\pi^4}\right)\left(1+\frac{2^4u^4}{3^4\pi^4}\right)\left(1+\frac{2^4u^4}{5^4\pi^4}\right)\cdots$$

Auch von den Gleichungen (9) und (11) läfst sich eine interessante Anwendung machen, mit der wir uns etwas ausführlicher beschäftigen wollen.

§. 73.

Die Reihen für die Tangente, Cotangente und Cosekante.

Zwei ebenso einfache als elegante und brauchbare Relationen ergeben sich aus (9) und (11) dadurch, dafs man beiderseits mit v dividirt und dann zur Gränze für abnehmende v übergeht, wobei man den Satz $Lim\,\frac{Arctan\,\delta}{\delta}=1$ [§. 9. Formel (5)] mehrmals anzuwenden Gelegenheit hat. Nach geschehener Division mit v läfst sich die linke Seite von (9) in folgender Form darstellen:

$$\frac{Arctan\left(\frac{e^v-e^{-v}}{e^v+e^{-v}}\cot u\right)}{\frac{e^v-e^{-v}}{e^v+e^{-v}}\cot u}\cdot\frac{e^v-e^{-v}}{v}\cdot\frac{\cot u}{e^v+e^{-v}}.$$

Hier ist nun für abnehmende v, $Lim(e^v-e^{-v})=0$, $Lim(e^v+e^{-v})=2$. Setzen wir der Kürze wegen

$$\frac{e^v-e^{-v}}{v}\cot u=\delta$$

so ist δ eine Gröfse, welche mit v gleichzeitig bis zur Gränze Null abnimmt. Für den ersten Faktor haben wir also $Lim\,\frac{Arctan\,\delta}{\delta}=1$. Wir haben nun noch

$$Lim\,\frac{e^v-e^{-v}}{v}\quad\text{und}\quad Lim\,\frac{\cot u}{e^v+e^{-v}}$$

zu bestimmen. Es ist aber durch Verwandlung von e^v und e^{-v} in Reihen

$$\frac{e^v-e^{-v}}{v}=2\left[1+\frac{v^2}{1.2.3}+\frac{v^4}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]$$

folglich

$$Lim\ \frac{e^v - e^{-v}}{v} = 2$$

Ferner haben wir

$$Lim\ \frac{\cot u}{e^v + e^{-v}} = \frac{\cot u}{2}$$

Führen wir alle diese Werthe ein, so ist

(1)
$$Lim\left[\frac{1}{v}\ Arctan\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\cot u\right)\right]$$
$$= 1\ .\ 2\ .\ \frac{\cot u}{2} = \cot u$$

und diefs bleibt auf der linken Seite in Formel (9) stehen.

Alle Glieder auf der rechten Seite haben nach geschehener Division mit v die Form:

$$\frac{1}{v}\ Arctan\ \frac{v}{n\pi \mp u} = \frac{Arctan\ \frac{v}{n\pi \mp u}}{\frac{v}{n\pi \mp u}}\ .\ \frac{1}{n\pi \mp u}$$

worin n eine ganze positive Zahl bedeutet.

Setzen wir $\frac{v}{n\pi \mp u} = \delta$, so ist δ eine mit v gleichzeitig bis zur Gränze Null abnehmende Gröfse; folglich wird

$$Lim\left[\frac{1}{v}\ Arctan\ \frac{v}{n\pi \mp u}\right] = Lim\ \frac{Arctan\ \delta}{\delta}\ .\ \frac{1}{n\pi \mp u}$$
$$= \frac{1}{n\pi \mp u}.$$

Führen wir dieses Resultat für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und das in (1) erhaltene in die beiderseits durch v getheilte Gleichung (9) des vorigen Paragraphen ein, so ergiebt sich

(2)
$$\cot u = \frac{1}{u} - \frac{1}{\pi - u} + \frac{1}{\pi + u} - \frac{1}{2\pi - u} + \frac{1}{2\pi + u} - \ldots$$

oder wenn man je zwei Glieder zusammennimmt:

(3)
$$\cot u$$
$$= \frac{1}{u} - \frac{2u}{\pi^2 - u^2} - \frac{2u}{(2\pi)^2 - u^2} - \frac{2u}{(3\pi)^2 - u^2} - \ldots$$

Dividirt man auch in der Gleichung (11) §. 72. beiderseits mit v und geht dann zur Gränze für abnehmende v über, so findet man ebenso leicht

$$Lim\left[\frac{1}{v}\ Arctan\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\tan u\right)\right] = \tan u$$

und für ein ungerades n

$$Lim\left[\frac{1}{v}\ Arctan\ \frac{2v}{n\pi \mp 2u}\right] = \frac{2}{n\pi \mp 2u} = \frac{1}{\frac{n\pi}{2} \mp u}.$$

woraus dann folgt

$$(4)\qquad \tan u = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-u} - \frac{1}{\frac{\pi}{2}+u} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2}-u} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+u} + \cdots$$

oder

$$(5)\qquad \tan u = \frac{2u}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - u^2} + \frac{2u}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - u^2} + \frac{2u}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 - u^2} + \cdots$$

Man kann diese beiden Gleichungen auch leicht in folgende Formen bringen:

$$(6)\qquad \tan\frac{u}{2} = \frac{2}{\pi-u} - \frac{2}{\pi+u} + \frac{2}{3\pi-u} - \frac{2}{3\pi+u} + \cdots$$

und

$$(7)\qquad \tan\frac{u}{2} = \frac{4u}{\pi^2-u^2} + \frac{4u}{(3\pi)^2-u^2} + \frac{4u}{(5\pi)^2-u^2} + \cdots$$

Addirt man endlich die Gleichungen (2) und (6), (3) und (7), unter der Bemerkung, dafs

$$\cot u + \tan\frac{u}{2} = \frac{\cos u}{\sin u} + \frac{1-\cos u}{\sin u}$$

$$= \frac{1}{\sin u} = \operatorname{cosec} u$$

ist, so erhält man noch:

$$(8)\qquad \operatorname{cosec} u = \frac{1}{u} + \frac{1}{\pi-u} - \frac{1}{\pi+u} - \frac{1}{2\pi-u} + \frac{1}{2\pi+u} + \cdots$$

worin das Vorzeichen rechts von Paar zu Paar wechselt, und

$$(9)\qquad \operatorname{cosec} u = \frac{1}{u} + \frac{2u}{\pi^2-u^2} - \frac{2u}{(2\pi)^2-u^2} + \frac{2u}{(3\pi)^2-u^2} - \cdots$$

Aus diesen für jedes u geltenden Ausdrücken lassen sich auch unter gewissen Beschränkungen andere ableiten, welche die Cotangente, Tangente und Cosekante in Form solcher Reihen darstellen, welche nach Potenzen der veränderlichen Gröfse u fortschreiten.

Bezeichnet nämlich a eine constante Gröfse, so ist immer

$$\frac{u}{a^2-u^2} = \frac{u}{a^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{u^2}{a^2}}$$

und hier läfst sich für

$$1 > \frac{u}{a} > -1$$

oder

$$a > u > -a$$

der Quotient $\frac{1}{1-\frac{u^2}{a^2}}$ in eine Reihe verwandeln (§. 28.) und giebt

$$\frac{u}{a^2-u^2} = \frac{u}{a^2}\left[1 + \frac{u^2}{a^2} + \frac{u^4}{a^4} + \frac{u^6}{a^6} + \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{a}\left[\frac{u}{a} + \frac{u^3}{a^3} + \frac{u^5}{a^5} + \frac{u^7}{a^7} + \cdots\right]$$

Diese Transformation kann man mit jedem Gliede der Reihen (3), (5), (9) vornehmen. Für die erste müssen die Bedingungen

$$\pi > u > -\pi, \quad 2\pi > u > -2\pi \text{ etc.}$$

erfüllt sein, welche sich auf die erste reduziren. Wir haben also für $\pi > u > -\pi$

$$\cot u$$
$$= \frac{1}{u} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{u}{\pi} + \frac{u^3}{\pi^3} + \frac{u^5}{\pi^5} + \frac{u^7}{\pi^7} + \cdots\cdots\right]$$
$$- \frac{2}{2\pi}\left[\frac{u}{2\pi} + \left(\frac{u}{2\pi}\right)^3 + \left(\frac{u}{2\pi}\right)^5 + \cdots\right]$$
$$- \frac{2}{3\pi}\left[\frac{u}{3\pi} + \left(\frac{u}{3\pi}\right)^3 + \left(\frac{u}{3\pi}\right)^5 + \cdots\right]$$
$$- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Lösen wir die einzelnen Parenthesen auf und nehmen darauf alle Glieder in vertikaler Richtung zusammen, so erhalten wir:

$$\cot u$$
$$= \frac{1}{u} - \frac{2u}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$
$$- \frac{2u^3}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right)$$
$$- \frac{2u^5}{\pi^6}\left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots\right)$$
$$- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

oder, wenn wir die Summen der eingeklammerten Reihen nach Formel (4) §. 71. für $n = 1, 2, 3, \ldots$ bestimmen,

(10)

$$\cot u$$
$$= \frac{1}{u} - \frac{2^2 B_1}{1.2} u - \frac{2^4 B_3}{1.2.3.4} u^3 - \frac{2^6 B_5}{1.2.3.4.5.6} u^5 - \cdots$$
$$\pi > u > -\pi$$

oder auch, wenn man $u = \frac{1}{2}x$ setzt und mit 2 beiderseits dividirt:

(11)
$$\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}x$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{B_1 x}{1.2} - \frac{B_3 x^3}{1.2.3.4} - \frac{B_5 x^5}{1.2.3.4.5.6} - \dots$$
$$2\pi > x > -2\pi$$

Eine ganz ähnliche Transformation läfst sich mit der Gleichung (5) vornehmen, wenn u den Bedingungen

$$\frac{\pi}{2} > u > -\frac{\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{2} > u > -\frac{3\pi}{2},\ \dots$$

unterworfen ist. Diese Bedingungen reduziren sich auf die erste, weil durch deren Erfüllung die übrigen gleich mit erfüllt sind. Verwandelt man nun für $\frac{\pi}{2} > u > -\frac{\pi}{2}$ jedes einzelne Glied von (5) in eine Reihe und nimmt dann ähnlich wie vorher alle diese Reihen in vertikaler Richtung zusammen, so findet man leicht:

$$\begin{aligned} \tan u = {} & \frac{2^3 u}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) \\ & + \frac{2^5 u^3}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) \\ & + \frac{2^7 u^5}{\pi^6}\left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \dots\right) \\ & + \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Gleichung (6) in §. 71. für $n = 1, 2, 3, \dots$ ergiebt sich hieraus:

(12)
$$\tan u$$
$$= \frac{2^2(2^2-1)}{1.2}B_1 u + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4}B_3 u^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{1.2.3.4.5.6}B_5 u^5 + \dots$$
$$\frac{\pi}{2} > u > -\frac{\pi}{2}$$

Man könnte endlich eine ähnliche Transformation auch auf die Gleichung (9) anwenden. Man gelangt aber kürzer zu dem Resultate, was man finden würde, wenn man in (12) $\frac{u}{2}$ für u setzt und dann (10) hierzu addirt. Es ergiebt sich

(13)
$$\operatorname{cosec} u = \frac{1}{u}$$
$$+ \frac{2(2-1)}{1.2}B_1 u + \frac{2(2^3-1)}{1.2.3.4}B_3 u^3 + \frac{2(2^5-1)}{1.2.3.4.5.6}B_5 u^5 + \dots$$
$$\pi > u > \pi$$

Vergleicht man die hier entwickelte Reihe für $tan\, u$ mit der auf S. 176 unter No. (5) gewonnenen Formel, so ergiebt sich eine Beziehung zwischen den Tangentencoefficienten und den Bernoulli'schen Zahlen; es ist nämlich

$$T_{2n-1} = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_{2n-1}$$

und umgekehrt

$$B_{2n-1} = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)} T_{2n-1}$$

und diese Relationen können dazu dienen, um entweder die Tangentencoefficienten aus den Bernoulli'schen Zahlen, oder umgekehrt diese aus jenen zu berechnen.

§. 74.

Die Sekantencoefficienten und die Sekantenreihe.

Aus den Formeln des vorigen Paragraphen lassen sich noch ein paar auf die Sekante bezügliche Relationen ableiten und zwar mittelst folgender Schlüsse.

I. Setzt man in den Gleichungen (9) und (11) $u = \frac{\pi}{4}$, so reduziren sie sich gemeinschaftlich auf die folgende:

$$(1) \quad Arctan\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\right)$$
$$= Arctan\frac{4v}{\pi} - Arctan\frac{4v}{3\pi} + Arctan\frac{4v}{5\pi} - \dots$$

Hier kann man unter der Voraussetzung $\frac{4v}{\pi} < 1$ oder $v < \frac{\pi}{4}$, woraus von selbst folgt $\frac{4v}{3\pi} < 1$, $\frac{4v}{5\pi} < 1$ u. s. f., jeden einzelnen Bogen nach Formel (1) §. 49. in eine Reihe verwandeln; es wird hierdurch

$$Arctan\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\right)$$
$$= \frac{4v}{\pi} - \frac{1}{3}\left(\frac{4v}{\pi}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{4v}{\pi}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{4v}{\pi}\right)^7 + \dots$$
$$- \frac{4v}{3\pi} + \frac{1}{3}\left(\frac{4v}{3\pi}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{4v}{3\pi}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{4v}{3\pi}\right)^7 + \dots$$
$$+ \frac{4v}{5\pi} - \frac{1}{3}\left(\frac{4v}{5\pi}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{4v}{5\pi}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{4v}{5\pi}\right)^7 + \dots$$
$$- \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

oder, wenn man die Glieder in vertikaler Richtung zusammennimmt:

$$(2)\qquad \mathrm{Arctan}\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\right)$$

$$= \frac{4v}{\pi}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$$

$$- \frac{1}{3}\left(\frac{4v}{\pi}\right)^3 \left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{1}{5}\left(\frac{4v}{\pi}\right)^5 \left(\frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \ldots\right)$$

$$- \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Andererseits ist aber aus naheliegenden Gründen:

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1 - e^{-2v}}{1 + e^{-2v}}\right) = \mathrm{Arctan}\,1 - \mathrm{Arctan}\,(e^{-2v})$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{1}\left(1 - \frac{2v}{1} + \frac{2^2 v^2}{1\,.\,2} - \ldots\right)$$

$$+ \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2v}{1} + \frac{2^2 v^2}{1\,.\,2} - \ldots\right)^3$$

$$- \frac{1}{5}\left(1 - \frac{2v}{1} + \frac{2^2 v^2}{1\,.\,2} - \ldots\right)^5$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Führt man die angedeuteten Potenzirungen aus und ordnet Alles nach Potenzen von v, so läfst sich das Resultat in folgende Form bringen:

$$\frac{v}{1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2^2\,.\,v^3}{1\,.\,2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2^4\,.\,5\,.\,v^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{1}{7}\cdot\frac{2^6\,.\,61\,.\,v^7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \ldots$$

oder, wenn wir diejenigen Faktoren in den Zählern, deren Gesetz man nicht absieht, nämlich

$$1,\; 1,\; 5,\; 61,\; \ldots$$

mit B_0, B_2, B_4, B_6, ... bezeichnet,

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\right)$$

$$= \frac{1}{1}B_0 v - \frac{1}{3}\cdot\frac{2^2 B_2}{1\,.\,2}v^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{2^4 B_4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}v^5 - \ldots$$

Vergleicht man dieses Resultat mit (2), so ergeben sich aus der Identifizirung gleicher Potenzen von v folgende Relationen:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{B_0 \pi}{2^2}$$

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots = \frac{B_2 \pi^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 2^4}$$

$$\frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \ldots = \frac{B_4 \pi^5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 2^6}$$

. . . .

und überhaupt für eine ganze Zahl n

(3)
$$\frac{1}{1^{2n+1}} - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \ldots$$
$$= \frac{B_{2n} \pi^{2n+1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (2n) \,.\, 2^{2n+2}} .$$

Mittelst dieser Relation ist es nun sehr leicht, die Sekante in eine Reihe zu verwandeln.

II. Setzt man in der Gleichung (8) $\frac{\pi}{2} - u$ an die Stelle von u, so kommt:

$$\sec u$$
$$= \frac{1}{\frac{\pi}{2} - u} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + u} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} - u} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + u} + \frac{1}{\frac{5\pi}{2} - u} + \frac{1}{\frac{5\pi}{2} + u} - \ldots$$

und durch Vereinigung von je zwei Gliedern

(4)
$$\sec u$$
$$= \frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - u^2} - \frac{3\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - u^2} + \frac{5\pi}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 - u^2} - \ldots$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe ist für ein ungerades m von der Form

$$\frac{m\pi}{\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 - u^2} = \frac{2^2}{m\pi} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2u}{m\pi}\right)^2}$$

und wenn man für $2u < m\pi$ diefs in eine Reihe verwandelt, so wird

$$\frac{m\pi}{\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 - u^2}$$
$$= \frac{2^2}{m\pi}\left[1 + \left(\frac{2u}{m\pi}\right)^2 + \left(\frac{2u}{m\pi}\right)^4 + \left(\frac{2u}{m\pi}\right)^6 + \ldots\right]$$

Nehmen wir diese Verwandlung mit jedem Gliede der Reihe (4) vor, wozu die Bedingungen

$$2u < 1\pi, \quad 2u < 3\pi, \quad 2u < 5\pi, \quad \ldots$$

d. h.

$$\frac{\pi}{2} > u > -\frac{\pi}{2}$$

gehören, so entsteht Folgendes:

$$\begin{aligned} \sec u & \\ = & \frac{2^2}{\pi}\left[1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^4 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^6 + \ldots\right] \\ & - \frac{2^2}{3\pi}\left[1 + \left(\frac{2u}{3\pi}\right)^2 + \left(\frac{2u}{3\pi}\right)^4 + \left(\frac{2u}{3\pi}\right)^6 + \ldots\right] \\ & + \frac{2^2}{5\pi}\left[1 + \left(\frac{2u}{5\pi}\right)^2 + \left(\frac{2u}{5\pi}\right)^4 + \left(\frac{2u}{5\pi}\right)^6 + \ldots\right] \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

oder bei vertikaler Summirung:

$$\begin{aligned} \sec u & \\ = & \frac{2^2}{\pi}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right) \\ & + \frac{2^4 u^2}{\pi^3}\left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots\right) \\ & + \frac{2^6 u^4}{\pi^5}\left(\frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \ldots\right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Bringen wir hier die unter I. gefundenen Resultate in Anwendung, so findet sich sehr einfach für $B_0 = 1$

(5)
$$\begin{aligned} \sec u & \\ = 1 & + \frac{B_2 u^2}{1.2} + \frac{B_4 u^4}{1.2.3.4} + \frac{B_6 u^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots \\ & \frac{\pi}{2} > u > -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Formel mit dem auf S. 175 unter No. (2) verzeichneten Resultate giebt auf der Stelle zu erkennen, dafs die hier vorkommenden Zahlen B_2, B_4, B_6 etc. mit den Sekantencoefficienten T_2, T_4, T_6 etc. identisch sind.

Capitel XIX.
Die wichtigsten Eigenschaften der Kettenbrüche.

§. 75.
Eigenschaften der Näherungsbrüche.

Ein Kettenbruch entsteht, wenn man mehrere beliebige Brüche so mit einander in Verbindung bringt, dafs jeder folgende einen Bestandtheil von dem Nenner des vorhergehenden Bruches ausmacht, wie in den folgenden Ausdrücken:

$$\frac{2}{5+\frac{3}{4}},\quad \frac{2}{5+\frac{3}{4-\frac{1}{7}}},\quad \frac{2}{5+\frac{3}{4-\frac{1}{7+\frac{2}{9}}}}$$

Das allgemeine Schema eines Kettenbruches ist hiernach

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cfrac{b_4}{a_4+\dots}}}}$$

wobei $a_1, a_2, a_3, \dots b_1, b_2, b_3, \dots$ positive oder negative, ganze oder selbst gebrochene Gröfsen bedeuten können. Die einzelnen Brüche

$$\frac{b_1}{a_1},\quad \frac{b_2}{a_2},\quad \frac{b_3}{a_3},\quad \frac{b_4}{a_4},\quad \dots$$

welche in dem Kettenbruche vorzukommen scheinen, nennt man die Glieder desselben und den Kettenbruch selbst einen ein-, zwei-, ... $n$gliedrigen, je nachdem derselbe aus ein, zwei, ... n Gliedern besteht.

Bricht man den $n$gliedrigen Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\dots+\cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

der Reihe nach bei dem ersten, zweiten, dritten, ... $n$ten Nenner ab, so entstehen die Brüche:

$$\frac{b_1}{a_1},\quad \frac{b_1}{a_1+\frac{b_2}{a_2}},\quad \frac{b_1}{a_1+\frac{b_2}{a_2+\frac{b_3}{a_3}}},\quad \dots.$$

welche Näherungsbrüche heifsen, weil sie sich in manchen Fällen dem Werthe des ganzen Kettenbruches successive nähern. Der erste Näherungsbruch ist nichts Anderes als das erste Glied des Kettenbruches, und der letzte ($n$te) Näherungsbruch ist der ganze Kettenbruch selbst. Richtet man die Näherungsbrüche ein, so erhält man leicht

$$\frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{a_2 b_1}{a_2 a_1 + b_2}, \quad \frac{a_3 a_2 b_1 + b_3 b_1}{a_3 (a_2 a_1 + b_2) + b_3 a_1},$$

$$\frac{a_4 (a_3 a_2 b_1 + b_3 b_1) + b_4 a_2 b_1}{a_4 [a_3 (a_2 a_1 + b_2) + b_3 a_1] + b_4 (a_2 a_1 + b_2)}.$$

Bezeichnet man diese Brüche der Reihe nach mit $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots$ so scheint hier vom dritten an folgendes Gesetz obzuwalten:

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3 p_2 + b_3 p_1}{a_3 q_2 + b_3 q_1}, \quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{a_4 p_3 + b_4 p_2}{a_4 q_3 + b_4 q_2}, \ldots$$

welches allgemein ausgesprochen lauten würde:

$$(1) \qquad \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}}$$

worin n jede beliebige positive ganze Zahl bedeuten kann. Wäre dieses Gesetz richtig, so müfste auch sein

$$(2) \qquad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1} p_n + b_{n+1} p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + b_{n+1} q_{n-1}}$$

wie man aus dem Vorigen findet, wenn man $n + 1$ an die Stelle von n setzt. Könnte man nun zeigen, dafs aus dem Bildungsgesetz des Kettenbruches unter Voraussetzung der Gleichung (1) die obige Relation ebenfalls hervorginge, so würde man hieraus schliefsen können, dafs die Gleichung (2) allgemein richtig sei. Nun geht aber der nächstfolgende Näherungsbruch $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ aus dem vorhergehenden $\frac{p_n}{q_n}$ dadurch hervor, dafs man in diesem $a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ für a_n setzt; denn es ist

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3} + \ldots + \cfrac{b_n}{a_n}}}$$

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3} + \ldots + \cfrac{b_n}{a_n + \cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}}}$$

Setzen wir also in (1) $a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ an die Stelle von a_n, so erhalten wir

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{\left(a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + b_n q_{n-2}}$$

d. i. nach Multiplikation mit a_{n+1} im Zähler und Nenner

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{(a_{n+1} a_n + b_{n+1}) p_{n-1} + a_{n+1} b_n p_{n-2}}{(a_{n+1} a_n + b_{n+1}) q_{n-1} + a_{n+1} b_n q_{n-2}}$$

oder

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1} (a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}) + b_{n+1} p_{n-1}}{a_{n+1} (a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}) + b_{n+1} q_{n-1}}$$

und wenn man gemäfs der Gleichung (1)

$$a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2} = p_n, \quad a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2} = q_n$$

setzt,

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1} p_n + b_{n+1} p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + b_{n+1} q_{n-1}}$$

Diefs ist aber die Gleichung (2); das hypothetisch angenommene Bildungsgesetz der Näherungsbrüche gilt also für den $(n+1)$sten Näherungsbruch, wenn es für den $n$ten richtig war; es gilt mithin allgemein, weil es für den dritten zutrifft. Für die successive Berechnung der Näherungsbrüche, deren letzter den Totalwerth des ganzen Kettenbruches giebt, hat man also nicht nöthig, die einzelnen Brüche

$$\frac{b_1}{a_1}, \quad \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2}}, \quad \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3}}} \quad \text{etc.}$$

sämmtlich auf die gewöhnliche Weise einzurichten, sondern berechnet blos die beiden ersten

$$\frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{a_2 b_1}{a_2 a_1 + b_2}$$

und leitet nun nach diesen aus Formel (1) alle übrigen ab.

Bemerkenswerth sind noch die Ausdrücke für die Differenz zweier auf einander folgenden Näherungsbrüche. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{a_{n+1} p_n + b_{n+1} p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + b_{n+1} q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{b_{n+1} p_{n-1} q_n - b_{n+1} p_n q_{n-1}}{q_{n+1} q_n} \\ &= -\frac{b_{n+1}}{q_{n+1} q_n} (p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)\end{aligned}$$

Ferner hat man

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}}$$

folglich

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = q_n q_{n-1} \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$$

und durch Substitution dieses Ausdruckes in die vorhergehende Rechnung

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = - \frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$$

Nennen wir $\varDelta_n$ die Differenz links, so ist die auf der rechten Seite in Parenthesen stehende $= \varDelta_{n-1}$, mithin hängt die $n$te Differenz so von der vorhergehenden ab, dafs

(3) $$\varDelta_n = - \frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} \varDelta_{n-1}$$

ist. Hiernach kann man alle Differenzen berechnen, weil man die erste kennt,

(4) $$\varDelta_1 = \frac{a_2 b_1}{a_2 a_1 + b_2} - \frac{b_1}{a_1} = - \frac{b_1 b_2}{q_1 q_2}$$

Unter der Voraussetzung, dafs die Gröfsen $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ sämmtlich positiv sind, lassen sich hieraus noch mancherlei Folgerungen ziehen. Dann ist nämlich $\varDelta_1$ negativ, $\varDelta_2$ positiv, $\varDelta_3$ negativ, $\varDelta_4$ positiv u. s. f., oder wenn man das Negative und Positive durch < 0 und > 0 unterscheidet,

$$\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1} < 0, \quad \frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2} > 0$$

$$\frac{p_4}{q_4} - \frac{p_3}{q_3} < 0, \quad \frac{p_5}{q_5} - \frac{p_4}{q_4} > 0$$

u. s. f.

woraus folgt

$$\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_2}{q_2}, \quad \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_3}{q_3}$$

$$\frac{p_3}{q_3} > \frac{p_4}{q_4}, \quad \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_5}{q_5}$$

u. s. f.

Es ist aber auch, abgesehen von den Vorzeichen, jede Differenz kleiner als die vorhergehende. Denn in der Gleichung (3) hat man

$$\frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} = \frac{b_{n+1} q_{n-1}}{a_{n+1} q_n + b_{n+1} q_{n-1}}$$

folglich, weil alle die Gröfsen a und b, mithin auch alle p und q positiv sind,

$$\frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} < 1$$

und also

$$\Delta_n < \Delta_{n-1}$$

wenn man blos die numerischen Werthe berücksichtigt. Wir haben also z. B. den numerischen Werth von $\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1} >$ als den von $\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2}$, oder, weil die erste Differenz an sich negativ, folglich ihr numerischer Werth das Entgegengesetzte ist,

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} > \frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2}$$

woraus

$$\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3}$$

folgt. Ebenso würde aus

$$\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_4}{q_4} > \frac{p_5}{q_5} - \frac{p_4}{q_4}$$

folgen

$$\frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} \text{ u. s. f.}$$

Die Näherungsbrüche ungerader Ordnung nehmen also beständig ab.

Der numerische Werth von Δ_3 ist ferner kleiner als der von Δ_2, oder, weil Δ_3 an sich negativ ist,

$$\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2}$$

woraus folgt

$$\frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4}.$$

Ebenso würde man

$$\frac{p_4}{q_4} < \frac{p_6}{q_6} \text{ u. s. f.}$$

finden, d. h. die Näherungsbrüche gerader Ordnung wachsen fortwährend.

Wir haben hier für Kettenbrüche, deren sämmtliche Zähler und Nenner positiv sind, die merkwürdige Eigenschaft kennen gelernt, dafs die Näherungsbrüche ungerader Ordnung eine fallende, die gerader Ordnung eine steigende Reihe bilden, während die Differenzen der benachbarten Näherungsbrüche ihren absoluten Werthen nach immer abnehmen. Da nun der letzte Näherungsbruch der Werth des ganzen Kettenbruches ist, so mufs folglich eine Annäherung an den Werth des ganzen Kettenbruches statt finden. Man kann sich dieses Verhältnifs leicht durch eine Zeichnung veranschaulichen. Man trage nämlich auf einer geraden Linie SP in gleichen Entfernungen von einander die Punkte P_1, P_2, P_3, ...

auf, errichte in diesen die Senkrechten P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 ..., und nehme nach irgend einem Maafsstabe $P_1Q_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $P_2Q_2 = \frac{p_2}{q_2}$, $P_3Q_3 = \frac{p_3}{q_3}$ u. s. f. Endlich mache man PQ dem Gesammtwerthe des Kettenbruches gleich und ziehe durch Q eine Parallele QT zu PS. Verbindet man jetzt die Punkte Q_1, Q_3, Q_5, ... und ebenso Q_2, Q_4, Q_6, ... durch eine zusammenhängende krumme Linie, so erhält man zwei Curven, deren erstere vom Punkte Q_1 nach der Geraden QT zu herabgeht, während die zweite vom Punkte Q_2 aus nach jener Geraden hinaufsteigt und zugleich die Differenzen zwischen je zwei auf einander folgenden Senkrechten beständig abnehmen. Der letzte Näherungsbruch $\frac{p_n}{q_n}$ eines $n$gliedrigen Kettenbruches ist dann der Gesammtwerth PQ des ganzen Kettenbruches.

Bei weitem weniger einfach gestalten sich die Eigenschaften der Näherungsbrüche in den Fällen, wo einige oder alle Glieder eines Kettenbruches negativ sind. Nur in einem einzigen Falle läfst sich hier eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Näherungsbrüche angeben, wenn nämlich alle Glieder des Kettenbruches mit Ausnahme des ersten negativ und zugleich ganzzahlige ächte Brüche sind. Unter der gemachten Voraussetzung hat dann der Kettenbruch die Form

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \dots}}}$$

worin a_1, a_2, a_3, ... b_1, b_2, b_3, ... ganze Zahlen sind, welche die Eigenschaften

$$a_1 > b_1, \quad a_2 > b_2, \quad a_3 > b_3, \dots$$

haben. Hier ist nun

$$\frac{b_1}{a_1} < \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2}}$$

denn in dem zweiten Näherungsbruche ist der Nenner vermindert, folglich der Quotient gröfser. Man kann noch bemerken, dafs derselbe immer noch ein ächter Bruch ist, weil im Nenner a_1 wenigstens um eine Einheit gröfser als b_1 sein mufs, aber die Verminderung keine volle Einheit beträgt, indem $\frac{b_1}{a_1} < 1$ ist. Ferner hat man

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2}} < \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3}}}$$

Denn es wird rechts der Nenner a_1 um einen gröfseren Bruch vermindert als links, weil

$$\frac{b_2}{a_2} < \frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3}}$$

ist, wiewohl beide Ausdrücke ächte Brüche sind. Man kann auf diese Weise fortfahren zu schliefsen, und findet so das Resultat, dafs jeder Näherungsbruch kleiner als der nächstfolgende ist, die Näherungsbrüche also eine steigende Reihe bilden. Die ganze Schlufsweise würde aber nicht passen, wenn nicht alle einzelnen Glieder des Kettenbruches ächte Brüche wären, weil dann einer der Nenner in den Näherungsbrüchen negativ werden könnte, wie z. B. in dem Kettenbruche

$$\cfrac{1}{3 - \cfrac{7}{4 - \cfrac{9}{5 - \cfrac{1}{6}}}}$$

wo schon der zweite Näherungsbruch negativ wird.

Es ist übrigens sehr leicht, einen gegebenen Bruch in einen Kettenbruch von vorgeschriebener Form zu verwandeln. Wollte man z. B. den Bruch $\frac{289}{761}$ in einen Kettenbruch von der Form

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{7}{8 + \dots}}}}$$

auflösen, so würde man folgende von selbst verständliche Rechnung zu machen haben:

$$\frac{289}{761} = \frac{1}{\frac{761}{289}} = \frac{1}{2 + \frac{183}{289}}$$

$$\frac{183}{289} = \frac{3 \cdot 183}{867} = \frac{3}{\frac{867}{183}} = \frac{3}{4 + \frac{135}{183}}$$

$$\frac{135}{183} = \frac{5 \cdot 135}{915} = \frac{5}{\frac{915}{135}} = \frac{5}{6 + \frac{105}{135}}$$

$$\frac{105}{135} = \frac{7 \cdot 105}{945} = \frac{7}{\frac{945}{105}} = \frac{7}{8 + \frac{105}{105}} = \frac{7}{8 + 1}$$

Weiter kann man hier nicht gehen, weil der letzte Rest kein Bruch, sondern die Einheit ist. Substituirt man jede Gleichung in die vorhergehende, so erhält man

$$\frac{289}{761} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{7}{8 + 1}}}}$$

also den Bruch in der vorgeschriebenen Form, so weit diefs überhaupt möglich ist.

Wollte man denselben Bruch in einen Kettenbruch von der Form

$$\cfrac{2}{5 + \cfrac{4}{7 + \cfrac{6}{9 + \cfrac{8}{11 + \ldots}}}}$$

verwandeln, so stünde die Rechnung so:

$$\frac{289}{761} = \frac{2 \,.\, 289}{1522} = \frac{2}{\frac{1522}{289}} = \frac{2}{5 + \frac{77}{289}}$$

$$\frac{77}{289} = \frac{4 \,.\, 77}{1156} = \frac{4}{\frac{1156}{77}} = \frac{4}{7 + \frac{617}{77}}$$

$$\frac{617}{77} = \frac{6 \,.\, 617}{462} = \frac{6}{\frac{462}{617}} = \frac{6}{9 - \frac{5091}{617}}$$

Will man keine negativen Glieder, so mufs man hier abbrechen und erhält durch Substitution jeder Gleichung in die vorhergehende:

$$\frac{289}{761} = \cfrac{2}{5 + \cfrac{4}{7 + \cfrac{6}{9 - \cfrac{5091}{617}}}}$$

wobei die verlangte Form so weit beobachtet ist, als es geschehen kann. Diefs Beispiel zeigt zugleich, dafs man den nämlichen Bruch in unendlich viele Kettenbrüche verwandeln könne.

Es läfst sich recht gut denken, dafs es Rechnungen der Art geben könne, bei denen man ins Unendliche fortgehen dürfte, ohne auf negative Glieder zu stofsen, d. h. mit anderen Worten, dafs es auch unendliche Kettenbrüche geben könnte, deren successive Näherungsbrüche sich einem bestimmten endlichen Werthe als Gränze beständig näherten.

Wir wollen diesen wichtigen Gegenstand einer näheren Betrachtung unterwerfen.

§. 76.

Die unendlichen Kettenbrüche, ihre Convergenz und Divergenz.

I. Wir wollen uns zunächst mit denjenigen Kettenbrüchen beschäftigen, deren Glieder sämmtlich positiv sind, so dafs also in dem Ausdrucke

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots \textit{ in inf.}}}}$$

welcher das Thema unserer Untersuchungen ausmacht, die Gröfsen a_1, a_2, ... b_1, b_2, ... durchgängig positiv sind.

Durch ganz dieselben Betrachtungen wie im vorigen Paragraphen überzeugt man sich leicht von der Wahrheit der folgenden Sätze:

1) Jeder Näherungsbruch ungerader Ordnung ist gröfser und jeder Näherungsbruch gerader Ordnung kleiner, als alle folgenden Näherungsbrüche.

2) Die Näherungsbrüche ungerader Ordnung werden immer kleiner, die gerader Ordnung immer gröfser.

Es folgt hieraus noch

3) Kein Näherungsbruch ungerader Ordnung kann so klein sein, als einer gerader Ordnung, und kein Näherungsbruch gerader Ordnung so grofs, als irgend einer ungerader Ordnung.

Da nun die Näherungsbrüche ungerader Ordnung immer abnehmen, ohne so klein zu werden, als man will, und ebenso die Näherungsbrüche gerader Ordnung immer wachsen, ohne beliebig grofs werden zu können, so ist beim unendlichen Fortgehen kein anderer Fall möglich, als dafs sowohl die Näherungsbrüche ungerader, als gerader Ordnung jede für sich einer gewissen Gränze zueilen, ohne sie erreichen zu können. Es sind also für

$$Lim \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} = h, \quad Lim \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = k$$

h und k gewifs zwei endliche bestimmte Gröfsen. Nun können aber nur zwei Fälle vorkommen: entweder nämlich sind h und k verschieden, oder identisch. Mit einem Kettenbruche der ersten Art wäre nicht viel anzufangen; man könnte nicht sagen, derselbe sei dieser oder jener Gröfse gleich, sondern blos, er sei eine symbolische Darstellung von zwei Gröfsen zugleich, von denen die eine der Gränzwerth der Näherungsbrüche

ungerader, die andere der Gränzwerth der Näherungsbrüche gerader Ordnung ist. Kettenbrüche dieser Art können divergenten Reihen verglichen werden, mit denen man auch nicht rechnen kann, und mögen defshalb entsprechend divergente Kettenbrüche heifsen.

Sind dagegen die beiden Gränzen h und k identisch, so nähern sich die Näherungsbrüche des Kettenbruches von beiden Seiten her dieser gemeinschaftlichen Zahl, welcher sie so nahe kommen können, als man es verlangt, und die wir den Gränzwerth des Kettenbruches nennen wollen. Es ist dann für unbegränzt wachsende n

$$k = Lim \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

wofür wir kürzer schreiben wollen

$$k = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots \text{ in inf.}}}}$$

Kettenbrüche dieser Art mögen convergente Kettenbrüche heifsen, weil sie mit den convergenten Reihen die Eigenschaft gemein haben, dafs man sich mehr und mehr einer fest bestimmten Gränze nähert, je mehr Glieder man zusammennimmt.

Es entsteht nun die Frage: woran man die Convergenz oder Divergenz eines unendlichen Kettenbruches erkennen will, welcher, wie hier immer vorausgesetzt wird, nur aus positiven Gliedern besteht?

Auf diese Frage, welche für die Theorie der Kettenbrüche von ebenso grofser Wichtigkeit ist, wie die analoge Frage für die Theorie der Reihen, kann man nun im Allgemeinen sehr leicht antworten, wiewohl die spezielle Anwendung der Antwort nicht ohne Schwierigkeiten ist. Betrachten wir nämlich die Differenzen je zweier auf einander folgenden Näherungsbrüche, so ist

$$\Delta_{2n-1} = \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}.$$

Gehen wir hier zur Gränze für wachsende n über, so ist

$$Lim\, \Delta_{2n-1} = Lim \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - Lim \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$$

d. i. wenn wir uns an die Bedeutung von h und k erinnern,

$$Lim\, \Delta_{2n-1} = k - h$$

Für einen convergenten Kettenbruch ist aber $k = h$, folglich

$$Lim\ \Delta_{2n-1} = 0$$

dagegen bei einem divergenten Kettenbruche k von h verschieden, mithin

$$Lim\ \Delta_{2n-1} = \text{einer endlichen Gröfse.}$$

Ebenso mufs auch umgekehrt, wenn $Lim\ \Delta_{2n-1} = 0$ ist, $k = h$, und wenn $Lim\ \Delta_{2n-1}$ von Null verschieden ist, auch k von h verschieden sein. Wir können also sagen: ein Kettenbruch convergirt ganz sicher, wenn die Differenzen je zwei benachbarter Näherungsbrüche sich unbegränzt der Null nähern, und er divergirt gewifs, wenn diese Bedingung nicht statt findet.

Nun ist aber überhaupt nach Formel (5) §. 75.

$$\Delta_n = -\frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} \Delta_{n-1}$$

und hieraus findet man der Reihe nach

$$\Delta_2 = -\frac{b_3 q_1}{q_3} \Delta_1$$

$$\Delta_3 = -\frac{b_4 q_2}{q_4} \Delta_2 = \frac{b_3 q_1}{q_3} \cdot \frac{b_4 q_2}{q_4} \Delta_1$$

$$\Delta_4 = -\frac{b_5 q_3}{q_5} \Delta_3 = -\frac{b_3 q_1}{q_3} \cdot \frac{b_4 q_2}{q_4} \cdot \frac{b_5 q_3}{q_5} \Delta_1$$

u. s. f.

überhaupt

$$(1) \qquad \Delta_n = (-1)^{n-1} \frac{b_3 q_1}{q_3} \cdot \frac{b_4 q_2}{q_4} \cdot \frac{b_5 q_3}{q_5} \cdots \frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} \Delta_1$$

Man bemerkt leicht, dafs hier Δ_n durch ein Produkt von lauter ächten Brüchen dargestellt wird; denn die einzelnen Brüche sind von der Form

$$\frac{b_{m+1} q_{m-1}}{q_{m+1}} = \frac{b_{m+1} q_{m-1}}{a_{m+1} q_m + b_{m+1} q_{m-1}}$$

und hier sieht man gleich, dafs der Nenner gröfser als der Zähler ist, weil alle a und b, folglich auch alle q, positiv sind. Da es uns blos auf absolute Werthe ankommt, so ist

$$Lim\ \Delta_n = \Delta_1 \cdot \frac{b_3 q_1}{q_3} \cdot \frac{b_4 q_2}{q_4} \cdot \frac{b_5 q_3}{q_5} \cdots in\ inf.$$

Ein unendliches Produkt von ächten Brüchen kann aber ebensowohl eine endliche bestimmte Gröfse, als die Null zur Gränze haben. Der erste Fall tritt leicht dann ein, wenn die einzelnen Faktoren durch Zunahme sich mehr und mehr der Einheit nähern; wir müssen ihn daher zu vermeiden suchen. Sind aber alle Faktoren kleiner als ein gewisser, selbst ächter Bruch $\frac{1}{u}$ (wo $u > 1$ ist), so hat man nach (1)

$$\Delta_n < \left(\frac{1}{u}\right)^{n-1} \Delta_1$$

folglich, weil $Lim \left(\frac{1}{u}\right)^{n-1} = 0$ ist, um so mehr

$$Lim\, \Delta_n = 0$$

Es convergirt also der in Rede stehende Kettenbruch ganz gewifs, wenn alle die einzelnen Faktoren

$$\frac{b_3 q_1}{q_3},\ \frac{b_4 q_2}{q_4},\ \frac{b_5 q_3}{q_5},\ \ldots\ in\ inf.$$

kleiner als die Einheit sind und es bleiben, so weit man auch in der Reihe selbst fortgehen mag. Wir können diese Bedingung ganz einfach durch die Ungleichung

$$Lim\, \frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} < 1$$

ausdrücken.

Es ist aber

$$\frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} = \frac{b_{n+1} q_{n-1}}{a_{n+1} q_n + b_{n+1} q_{n-1}}$$
$$= \frac{1}{\frac{a_{n+1} q_n}{b_{n+1} q_{n-1}} + 1}$$

Soll nun der Gränzwerth dieses Ausdruckes unter der Einheit bleiben, so mufs

$$Lim\, \frac{a_{n+1} q_n}{b_{n+1} q_{n-1}} > 0$$

sein. Man hat aber weiter

$$\frac{a_{n+1} q_n}{b_{n+1} q_{n-1}} = \frac{a_{n+1} (a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2})}{b_{n+1} q_{n-1}}$$
$$= \frac{a_{n+1} a_n}{b_{n+1}} + \frac{a_{n+1} b_n}{b_{n+1}} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$$

Ist nun schon

$$Lim\, \frac{a_{n+1} a_n}{b_{n+1}} > 0$$

so ist offenbar die Bedingung

$$Lim\, \frac{a_{n+1} q_n}{b_{n+1} q_{n-1}} > 0$$

um so mehr erfüllt, weil a_{n+1}, b_n, b_{n+1}, q_{n-2} und q_{n-1} positive Gröfsen sind, also $Lim\, \frac{a_{n+1} b_n}{b_{n+1}} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$ nicht negativ werden kann. Wir können also sagen:

der Kettenbruch

(2)
$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}}}$$

worin alle a und b positiv sind, convergirt ganz sicher, wenn

(3)
$$Lim \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} > 0$$

ist, bei unbegränzt wachsenden n. Findet aber diese Bedingung nicht statt, so läfst sich nicht entscheiden, ob der Kettenbruch convergire oder divergire.

So wird man z. B. unter Anwendung dieser Regel finden, dafs von den Kettenbrüchen

$$\cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \ldots}}}$$

$$\cfrac{1^2}{2 + \cfrac{2^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \ldots}}}$$

der erste ganz sicher convergirt, während man diefs von dem zweiten nicht behaupten kann.

II. Auch bei denjenigen Kettenbrüchen, in welchen alle Glieder, mit Ausnahme des ersten, negativ sind, können Fälle der Convergenz oder Divergenz vorkommen. Einen convergenten Kettenbruch nennen wir hier wieder denjenigen, dessen Näherungsbrüche sich einer einzigen bestimmten Gröfse als Gränze fortwährend nähern, divergent jeden, welcher diese Eigenschaft nicht besitzt. Im Allgemeinen ist die Convergenz bei Kettenbrüchen mit negativen Gliedern sehr schwer zu entscheiden und es läfst sich mit Sicherheit nur an einer einzigen Art von Kettenbrüchen nachweisen, die aber für uns auch gerade die wichtigste ist. Sind nämlich in dem unendlichen Kettenbruche

(4)
$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots}}}$$

alle einzelnen Glieder

$$\frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{b_2}{a_2}, \quad \frac{b_3}{a_3}, \quad \ldots$$

ächte Brüche, welche ganze positive Zahlen zu Zählern und Nennern haben, so convergirt der Kettenbruch ganz sicher.

Zuerst nämlich bemerkt man leicht, dafs alle Näherungsbrüche positive ächte Brüche sind. Denn da alle a und b ganze Zahlen, $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$, ... ächte Brüche sind, so mufs a_1 von b_1 wenigstens um eine Einheit differiren. Es wird aber in dem zweiten Näherungsbruche

$$\frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2}}$$

von a_1 keine volle Einheit, sondern nur ein Bruchtheil derselben abgezogen, folglich ist noch immer

$$a_1 - \frac{b_2}{a_2} > b_1$$

mithin der zweite Näherungsbruch $\frac{p_2}{q_2}$ ein positiver ächter Bruch. — In

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3}}}$$

ist nun ferner aus ganz denselben Gründen

$$\frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3}}$$

ein positiver ächter Bruch; wird derselbe von a_1 abgezogen, welches wenigstens um eine Einheit gröfser als b_1 ist, so bleibt

$$a_1 - \frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3}} > b_1$$

woraus folgt, dafs auch $\frac{p_3}{q_3}$ ein positiver ächter Bruch ist. — Aus den nämlichen Gründen mufs auch die ähnlich gebildete Gröfse

$$\frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3 - \frac{b_4}{a_4}}}$$

ein ächter Bruch sein, woraus folgt, dafs

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3 - \frac{b_4}{a_4}}}}$$

ein positiver ächter Bruch ist. Man übersieht auf der Stelle, dafs die Fortsetzung dieser Schlufsreihe ins Unendliche möglich ist und dafs sie zeigt, wie alle Näherungsbrüche ächte und positive Brüche sind.

Ferner läfst sich nun zeigen, dafs die Näherungsbrüche beständig wachsen. Man kann diefs auf ähnliche Weise wie im vorigen Paragraphen thun, gelangt aber auch auf folgende Weise dazu:

Da gezeigt worden ist, dafs

$$\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\ \frac{p_3}{q_3},\ \frac{p_4}{q_4},\ \ldots$$

sämmtlich positiv sind, so folgt leicht, dafs es auch

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ \ldots$$

sein müssen. Da ferner b_1 positiv ist, aber b_2, b_3, b_4, ... alle negativ sind, so hat man aus den Formeln (3) und (4) in §. 75.

$$\varDelta_n = \frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}\varDelta_{n-1}$$

$$\varDelta_1 = \frac{b_1 b_2}{q_1 q_2}.$$

Hieraus findet man für $n = 2$, 3 u. s. f.

$$\varDelta_2 = \frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{b_1 b_2}{q_1 q_2}\cdot\frac{b_3 q_1}{q_3}$$

$$\varDelta_3 = \frac{p_4}{q_4} - \frac{p_3}{q_3} = \frac{b_1 b_2}{q_1 q_2}\cdot\frac{b_3 q_1}{q_3}\cdot\frac{b_4 q_2}{q_4}$$

u. s. f.

Es sind also alle Differenzen positiv und daraus folgt

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_4}{q_4} \ldots$$

d. h. die Näherungsbrüche wachsen beständig. Gleichwohl können sie nicht ins Unendliche zunehmen, weil sie nach dem Vorigen immer ächte Brüche bleiben; es müssen sich folglich die successiven Näherungsbrüche durch beständige Zunahme einer gewissen festen Gränze nähern, welche **höchstens** die Einheit sein kann. Der in Rede stehende Kettenbruch (4) ist folglich ein convergenter.

Es giebt in der That einen, aber auch nur einen Fall, in welchem der Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots}}}$$

worin $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$, $\frac{b_3}{a_3}$, ... ächte Brüche sind, die Einheit zur Gränze hat,

wenn nämlich jeder der einzelnen Nenner um eine Einheit größer als sein Zähler, der Kettenbruch also von der Form

$$(5)\qquad \cfrac{b_1}{b_1+1-\cfrac{b_2}{b_2+1-\cfrac{b_3}{b_3+1-\dots}}}$$

ist, worin sonst b_1, b_2, b_3, ... ganz beliebig bleiben. Da dieser Fall von Interesse ist, so wollen wir ihn etwas näher ansehen.

Zur successiven Berechnung der Näherungsbrüche hat man hier die Formeln

$$p_{n+1} = (b_{n+1}+1)\,p_n - b_{n+1}\,p_{n-1}$$
$$q_{n+1} = (b_{n+1}+1)\,q_n - b_{n+1}\,q_{n-1}$$

aus welchen man leicht erhält

$$(6)\qquad p_{n+1}-p_n = (p_n-p_{n-1})\,b_{n+1}$$
$$(7)\qquad q_{n+1}-q_n = (q_n-q_{n-1})\,b_{n+1}$$

Hieraus würden sich sehr leicht alle Differenzen zweier auf einander folgenden Näherungszähler und Näherungsnenner berechnen lassen, wenn man die jedesmalige erste dieser Differenzen wüfste. Man hat aber unmittelbar

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{b_1}{b_1+1},\quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{b_1 b_2 + b_1}{b_1 b_2 + b_1 + 1}$$

folglich

$$p_1 = b_1$$
$$p_2 - p_1 = b_1 b_2$$

und nun folgt aus (6) für $n = 2, 3, 4$ u. s. f.

$$p_3 - p_2 = (p_2 - p_1)\,b_3 = b_1 b_2 b_3$$
$$p_4 - p_3 = (p_3 - p_2)\,b_4 = b_1 b_2 b_3 b_4$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$p_n - p_{n-1} = \dots\dots\dots = b_1 b_2 b_3 \dots b_n$$

Addirt man alle diese Gleichungen nebst den zwei vorhergehenden, so ergiebt sich sogleich:

$$(8)\qquad p_n = b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \dots + b_1 b_2 b_3 \dots b_n$$

Ebenso hat man

$$q_1 = b_1 + 1$$
$$q_2 - q_1 = b_1 b_2$$

und nach (7) für $n = 2, 3, 4, \dots$

$$q_3 - q_2 = (q_2 - q_1)\,b_3 = b_1 b_2 b_3$$
$$q_4 - q_3 = (q_3 - q_2)\,b_4 = b_1 b_2 b_3 b_4$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$q_n - q_{n-1} = \dots\dots\dots = b_1 b_2 b_3 \dots b_n$$

folglich durch Addition dieser und der vorhergehenden Gleichungen:

$$q_n = 1 + b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \dots + b_1 b_2 b_3 \dots b_n$$

folglich der $n$te Näherungsbruch

$$(9) \qquad \frac{p_n}{q_n} = \frac{b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \dots + b_1 b_2 \dots b_n}{1 + b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \dots + b_1 b_2 \dots b_n}.$$

Läfst man hier n ins Unendliche wachsen, so wird offenbar p_n gröfser als jede angebbare Zahl, weil es einer aus n Gliedern bestehenden Reihe gleich ist, von denen jedes eine positive ganze Zahl sein mufs. Bemerkt man aber, dafs $q_n = 1 + p_n$, also

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n}{p_n + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{p_n}}$$

ist, so erhält man für unbegränzt wachsende n

$$Lim \frac{p_n}{q_n} = 1$$

mithin auch

$$1 = \cfrac{b_1}{b_1 + 1 - \cfrac{b_2}{b_2 + 1 - \cfrac{b_3}{b_3 + 1 - \dots}}}$$

wodurch der Werth des Kettenbruches gefunden ist.

Nimmt man z. B. für $b_1, b_2, b_3, \dots$ die natürlichen, die ungeraden und geraden Zahlen, so hat man

$$1 = \cfrac{1}{2 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{3}{4 - \dots}}} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{3}{4 - \cfrac{5}{6 - \dots}}}$$

$$= \cfrac{2}{3 - \cfrac{4}{5 - \cfrac{6}{7 - \dots}}}$$

und man würde auch die Näherungsbrüche dieser Kettenbrüche nach Formel (9) sehr leicht berechnen können.

Man überzeugt sich nun leicht, dafs der Werth eines Kettenbruches nicht mehr die Einheit sein kann, wenn auch nur ein einziger Nenner seinen Zähler um mehr als eine Einheit übersteigt. Ist z. B. der Kettenbruch

$$(10) \qquad \cfrac{b_1}{b_1 + 1 - \cfrac{b_2}{b_2 + 1 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{b_4 + 1 - \dots}}}},$$

gegeben, worin a_3 den Zähler b_3 um mehr als eine Einheit übertreffen soll, so gelten folgende Schlüsse:

Der Kettenbruch

$$\cfrac{b_4}{b_4+1-\cfrac{b_5}{b_5+1-\ldots}}$$

hat die Einheit zum Gränzwerthe, weil in ihm alle Nenner die zugehörigen Zähler um eine Einheit übersteigen. Der unendliche Kettenbruch in (10) ist also gleich dem folgenden endlichen:

$$(11) \qquad \cfrac{b_1}{b_1+1-\cfrac{b_2}{b_2+1-\cfrac{b_3}{a_3-1}}}$$

Hier ist nun $\frac{b_3}{a_3-1}$ ein ächter Bruch. Denn da b_3 und a_3 ganze Zahlen bedeuten und a_3 die Zahl b_3 der Voraussetzung nach um mehr als eine Einheit übertreffen soll, so mufs a_3 wenigstens $= b_3 + 2$, also $a_3 - 1$ wenigstens $= b_3 + 1$ sein, woraus folgt

$$\frac{b_3}{a_3-1} < 1$$

Der Kettenbruch (11) gehört also unter diejenigen, deren einzelne Glieder ächte Brüche sind, welche ganze Zahlen zu Zählern und Nennern haben. Sein Werth, d. h. der des unendlichen Kettenbruches (10), ist demnach ein ächter Bruch, also von der Einheit verschieden. Ganz ähnliche Schlüsse sind in jedem anderen Falle anwendbar.

§. 71.

Die Irrationalität gewisser Kettenbrüche.

Bei den Verwandlungen gewöhnlicher Brüche in Kettenbrüche von einer gegebenen Form, wie wir diese in §. 63. vorgenommen hatten, kann man im Allgemeinen bemerken, dafs früher oder später entweder kein gebrochenes Glied mehr kommt, also der Kettenbruch sich mit einer ganzen Zahl schliefst, oder ein negatives Glied entsteht, wenn auch das vorgelegte Schema keines enthält. Diese Erscheinung tritt namentlich immer dann ein, wenn die einzelnen Glieder des gegebenen Schema's ächte Brüche sind, welche ganze Zahlen zu Zählern und Nennern haben. Man überzeugt sich hiervon leicht durch den Versuch, einen beliebigen ächten Bruch $\frac{B}{A}$ in einen Kettenbruch von der Form

(1)
$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ldots}}}$$

in welchem die einzelnen Glieder

$$\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2},\ \frac{b_3}{a_3},\ \ldots$$

sämmtlich ächte Brüche sind, zu verwandeln.

I. Wir wollen zuerst voraussetzen, daſs die Glieder des Kettenbruches sämmtlich positiv sind. Soll nun $\frac{B}{A}$ in einen Kettenbruch von der obigen Form (1) umgewandelt werden, so muſs man dem $\frac{B}{A}$ zuvörderst den Zähler b_1 verschaffen und dann seinen Nenner in zwei Theile zerlegen, von welchen der eine a_1 ist. Dieſs geschieht durch folgende Rechnung:

$$\frac{B}{A}=\cfrac{b_1}{\cfrac{b_1 A}{B}}$$

Soll dieſs gleich dem in (1) stehenden Ausdrucke sein, so folgt daraus die Gleichheit der Nenner, also

$$\frac{b_1 A}{B}=a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ldots}}$$

oder

$$\frac{b_1 A-a_1 B}{B}=\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ldots}}$$

und wenn wir der Kürze wegen

$$b_1 A-a_1 B=C$$

setzen,

(2)
$$\frac{C}{B}=\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ldots}}$$

Es ist ferner

$$\frac{C}{B}=\cfrac{b_2}{\cfrac{b_2 B}{C}}$$

und wenn dieſs dem Kettenbruche in (2) gleich sein soll, so folgt

$$\frac{b_2 B}{C}=a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cfrac{b_4}{a_4+\ldots}}$$

oder

$$\frac{b_2 B - a_2 C}{C} = \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \ldots}}$$

und wenn wir

$$b_2 B - a_2 C = D$$

setzen,

(3) $$\frac{D}{C} = \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \ldots}}$$

Man übersieht leicht, wie diese Rechnung weiter geht. Werden nämlich die Zahlen $C, D, E, \ldots$ aus folgenden Gleichungen bestimmt:

$$C = b_1 A - a_1 B$$
$$D = b_2 B - a_2 C$$
$$E = b_3 C - a_3 D$$
u. s. f.

so ist

(4) $$\frac{B}{A} = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ldots}}$$

(5) $$\frac{C}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}}$$

(6) $$\frac{D}{C} = \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \ldots}}$$

(7) $$\frac{E}{D} = \cfrac{b_4}{a_4 + \cfrac{b_5}{a_5 + \ldots}}$$

u. s. w.

Nun convergirt aber der unendliche Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}}}$$

ganz sicher, wenn überhaupt a_n immer $> b_n$ ist, weil dann gewifs

$$Lim\, \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} > 0$$

ist, und sein Gränzwerth mufs ein ächter Bruch sein, weil er kleiner als der erste Näherungsbruch $\frac{b_1}{a_1}$, und dieser selbst ein ächter Bruch ist.

Wollen wir also $\frac{B}{A}$ in den unendlichen Kettenbruch (4) verwandeln, so mufs $\frac{B}{A}$ ein ächter Bruch sein. Die nämlichen Schlüsse sind aber auch auf die Gleichung (5) anwendbar. Hier ist ebenfalls der Kettenbruch rechts ein unendlicher convergenter und sein Gränzwerth < 1. Es ist also auch $\frac{C}{B}$ ein ächter Bruch. Aus den nämlichen Gründen sind ferner die Brüche $\frac{D}{C}$, $\frac{E}{D}$ u. s. f. ächte Brüche. Hieraus folgt nun der Reihe nach

$$A > B, \quad B > C, \quad C > D, \quad D > E \text{ u. s. f.}$$

oder

$$A > B > C > D > E \text{ etc.}$$

Die Zahlen A, B, C, D, ... bilden also eine unendliche abnehmende Reihe. Sie sind aber auch sämmtlich ganze Zahlen, wie man sogleich aus ihrem oben angegebenen Bildungsgesetze ersieht. Wenn aber eine Reihe von positiven ganzen Zahlen ins Unendliche abnimmt, so mufs sie an irgend einer Stelle ins Negative übergehen. Diefs kann entweder mittelst eines Durchganges durch die Null, wie in

$$6, 4, 2, 0, -2, -4, \ldots$$

oder mit Überspringung der Null, wie in

$$5, 3, 1, -1, -3, -5, \ldots$$

geschehen. Im ersten Falle müfste also eine der Zahlen A, B, C, D, ..., mithin auch einer der Brüche

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{B}, \frac{D}{C}, \frac{E}{D}, \ldots$$

d. h. einer der Kettenbrüche:

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ldots}}, \quad \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}},$$

$$\cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \ldots}}, \quad \cfrac{b_4}{a_4 + \cfrac{b_5}{a_5 + \ldots}}, \text{ u. s. f.}$$

gleich Null werden, was nicht möglich ist.

Im zweiten Falle mufs in der Reihe A, B, C, D, ... M, N, P, ... eine der Zahlen, etwa M, die letzte positive, und die darauf folgende N die erste negative, also der Quotient $\frac{N}{M}$ negativ sein. Es müfste also auch der entsprechende Kettenbruch, etwa

$$\cfrac{b_n}{a_n + \cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1} + \dots}}$$

einen negativen Werth haben, was unmöglich ist.

Aus diesen Betrachtungen folgt nun, dafs es nicht möglich ist, einen rationalen ächten Bruch in einen unendlichen Kettenbruch zu verwandeln, dessen Glieder ächte Brüche sind und ganze positive Zahlen zu Zählern und Nennern haben, weil früher oder später ein Glied erscheint, dessen Zähler die Null oder eine negative Zahl ist. Man übersieht auch gleich, dafs dieses Glied um so früher eintreten wird, je kleiner die Zahlen A und B selbst sind, weil dann die Reihe $A, B, C, D, \dots$ bald ins Negative übertritt, dafs dagegen für sehr grofse A und B viele Glieder des Kettenbruches positiv sein können, weil die Reihe $A, B, C, \dots$, wenn sie hoch anfängt, lange zu laufen hat, ehe sie das Gebiet des Negativen erreicht.

Wenn aber nun umgekehrt ein unendlicher Kettenbruch von der Form gegeben wird

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \dots}}}$$

worin $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots$ sämmtlich ächte Brüche, $a_1, a_2, \dots b_1, b_2, \dots$ ganze positive Zahlen sind, so kann derselbe nicht einen rationalen ächten Bruch zum Gränzwerthe haben, weil sonst gegen die Voraussetzung ein negativer oder ein sich annullirender Zähler in demselben vorkommen müfste. Aber der gesuchte Gränzwerth ist sicher ein ächter Bruch, weil er unter dem ersten Näherungsbruche $\frac{b_1}{a_1}$, der selbst ächt ist, liegen mufs. Es kann folglich der Näherungswerth des ganzen unendlichen Kettenbruches kein rationaler, sondern er mufs ein irrationaler ächter Bruch sein. Diefs stimmt auch ganz zu der Bemerkung, dafs der aus $\frac{B}{A}$ entstehende Kettenbruch desto mehr positive Glieder enthält, je gröfser A und B sind. Bedeutet aber, $\frac{B}{A}$ einen irrationalen ächten Bruch, so sind B und A unendlich grofse Zahlen, der Anfang der Reihe $A, B, C, \dots$ liegt also über jeder angebbaren Zahl (wie bei der Reihe der natürlichen Zahlen, rückwärts genommen) und folglich kann die Reihe $A, B, C, \dots$ selbst ins Unendliche fallen, ohne negativ zu werden.

II. Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich für diejenigen Kettenbrüche durchführen, in denen alle Glieder, mit Ausnahme des ersten, negativ sind und ganze Zahlen zu Zählern und Nennern haben, vorausgesetzt noch, dafs von irgend einer Stelle an die Nenner ihre zugehörigen Zähler um mehr als eine Einheit übertreffen.

Ist nämlich

$$\text{(8)} \qquad \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots}}}$$

der gegebene unendliche Kettenbruch, in welchem

$$\frac{b_1}{a_1}, \; \frac{b_2}{a_2}, \; \frac{b_3}{a_3}, \ldots$$

ächte Brüche, $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ ganze positive Zahlen sind, so würde der Versuch, einen rationalen Bruch $\frac{B}{A}$ in jenen Kettenbruch zu verwandeln, zu folgenden Rechnungen veranlassen:

$$\frac{B}{A} = \cfrac{b_1}{\cfrac{b_1 A}{B}}$$

soll diefs gleich dem Kettenbruche in (8) sein, so folgt

$$\frac{b_1 A}{B} = a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots}}$$

mithin

$$\frac{a_1 B - b_1 A}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4 - \ldots}}}$$

oder für

$$\text{(9)} \quad \left\{ \begin{aligned} & a_1 B - b_1 A = C \\ & \frac{C}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4 - \ldots}}} \end{aligned} \right.$$

Ferner ist

$$\frac{C}{B} = \cfrac{b_2}{\cfrac{b_2 B}{C}}$$

und wenn diefs gleich dem Kettenbruche in (9) sein soll, so mufs

$$\frac{b_2 B}{C} = a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4 - \ldots}}$$

oder für

(10) $$\left\{\begin{array}{l} a_2 C - b_2 B = D \\ \dfrac{D}{C} = \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4 - \cfrac{b_5}{a_5 - \ldots}}} \end{array}\right.$$

sein. Ebenso wäre ferner für

$$a_3 D - b_3 C = E$$

$$\frac{E}{D} = \cfrac{b_4}{a_4 - \cfrac{b_5}{a_5 - \cfrac{b_6}{a_6 - \ldots}}}$$

u. s. w.

Vorausgesetzt nun, dafs in allen den einzelnen Kettenbrüchen

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \ldots}}, \quad \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots}} \quad \text{u. s. f.}$$

die Nenner ihre entsprechenden Zähler um mehr als eine Einheit übersteigen, so sind die Werthe aller jener Kettenbrüche, mithin auch die Brüche

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{B}, \frac{D}{C}, \frac{E}{D}, \ldots$$

positiv und kleiner als die Einheit, mithin

$$A > B, \quad B > C, \quad C > D, \quad D > E \text{ u. s. f.}$$

Hier sind nun ganz die nämlichen Schlüsse anwendbar wie früher, aus welchen folgt, dafs eine der Zahlen A, B, C, ... gleich Null oder negativ werden mufs, was nicht sein kann, weil alle die einzelnen Kettenbrüche

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \ldots}}, \quad \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots}} \quad \text{u. s. f.}$$

positive ächte Brüche zu Gränzwerthen haben. Es ist also die Voraussetzung, dafs der unendliche Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots}}}$$

einen rationalen Bruch zum Gränzwerthe habe, falsch, und er hat demnach einen irrationalen Gränzwerth.

Diese Betrachtungen würden aber nur theilweise passen, wenn von irgend einer Stelle an die Nenner des Kettenbruches ihre Zähler nur um eine Einheit überstiegen. Wäre z. B. der Kettenbruch von der Form

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{b_3 + 1 - \cfrac{b_4}{b_4 + 1 - \ldots}}}}$$

wo nur die ersten zwei Nenner ihre Zähler um mehr als eine Einhe [redacted] steigen, so setze man den Werth desselben $= \frac{B}{A}$; man hat dan [redacted]

$$a_1 B - b_1 A = C$$

$$\frac{C}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{b_3 + 1 - \cfrac{b_4}{b_4 + 1 - \ldots}}}$$

und für

$$a_2 C - b_2 B = D$$

$$\frac{D}{C} = \cfrac{b_3}{b_3 + 1 - \cfrac{b_4}{b_4 + 1 - \cfrac{b_5}{b_5 + 1 - \ldots}}}$$

Nun ist der Reihe nach $\frac{B}{A} < 1$, $\frac{C}{B} < 1$, aber $\frac{D}{C}$ nicht < 1, weil der Gränzwerth des entsprechenden Kettenbruches die Einheit ist. Man hat also

$$A > B, \quad B > C, \quad C = D = E \ldots$$

Hier geht also die Abnahme nicht ins Unendliche, sondern nur bis zu einer gewissen Stelle. Es sind also die weiteren Schlüsse nicht, wie vorhin, anwendbar; dagegen hat man wegen $D = C$ auch

$$a_2 C - b_2 B = C$$

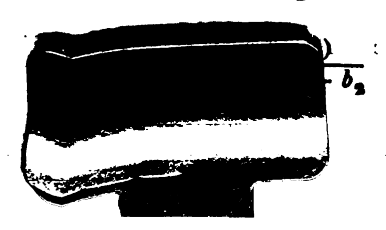
folglich

$$C = \frac{b_2 B}{a_2 - 1}$$

ferner:

$$a_1 B - b_1 A = \frac{b_2 B}{a_2 - 1}$$

woraus



folgt. Diefs würde man auch unmittelbar erhalten, wenn man bemerkte, dafs der in Rede stehende Kettenbruch dem folgenden

$$\frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - 1}}$$

gleich ist und diesen einrichtete.

Fassen wir nun alles Bisherige zusammen, so können wir das Theorem aussprechen:

Wenn in dem unendlichen Kettenbruche:

$$\frac{b_1}{a_1 \pm \frac{b_2}{a_2 \pm \frac{b_3}{a_3 \pm \ldots}}}$$

alle einzelnen Glieder ächte Brüche sind, welche ganze Zahlen zu Zählern und Nennern haben, wenn ferner von keiner Stelle an der Gränzwerth des übrigen unendlichen Kettenbruches der Einheit gleich ist, so hat der genannte Kettenbruch einen irrationalen ächten Bruch zum Gränzwerthe.

Wir werden später von diesem merkwürdigen Satze einige Anwendungen machen.

§. 78.

Die Reste der Kettenbrüche.

Schon bei der Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Kettenbruch von vorgeschriebener Form begegnet man der Erscheinung, dafs der Nenner des letzten Partialbruches einen Rest bei sich führt, der aus der Natur der ganzen Rechnung von selbst hervorgeht; so war in den früheren Beispielen

$$\frac{289}{761} = \frac{2}{5 + \frac{77}{289}} = \frac{2}{5 + \frac{4}{7 + \frac{617}{77}}}$$

$$= \frac{2}{5 + \frac{4}{7 + \frac{6}{9 - \frac{5091}{617}}}}$$

Das allgemeine Schema derartiger Kettenbrüche ist

(1)
$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ldots+\cfrac{b_n}{a_n+r_n}}}}$$

und hier entsteht nun die Frage, ob man berechtigt ist, den Rest r_n wegzulassen, sobald die Anzahl n der Partialbrüche ins Unendliche wächst. Man kann diese Frage auch so formuliren: „unter welchen Umständen hat die Differenz der beiden Kettenbrüche

(2)
$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ldots+\cfrac{b_n}{a_n+r_n}}}}$$

und

(3)
$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a^2+\cfrac{b_3}{a_3+\ldots+\cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

für unendlich wachsende n die Null zur Gränze," denn es ist unmittelbar klar, dafs in den Fällen, wo dieser Gränzwerth statt findet, beide Kettenbrüche identisch werden, sobald man sie ins Unendliche fortsetzt. Es läfst sich nun leicht vermuthen, dafs die Weglassung des Restes, ähnlich wie bei den Reihen, dann erlaubt sein werde, wenn er selbst sich der Gränze Null nähert; indessen bedarf die Sache doch einer genaueren Untersuchung, weil diefs, wie man gleich sehen wird, nicht der einzige Fall ist, in welchem die Differenz der in (2) und (3) verzeichneten Kettenbrüche die Null zur Gränze hat.

Bezeichnen wir die Kettenbrüche

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\ldots+\cfrac{b_{n-2}}{a_{n-2}}}}, \quad \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\ldots+\cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}}}}$$

mit $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ und den Kettenbruch in (3) mit $\frac{p_n}{q_n}$, so ist nach einer früheren Formel

(4)
$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_n p_{n-1}+b_n p_{n-2}}{a_n q_{n-1}+b_n q_{n-2}}$$

Der Kettenbruch (2), dessen Werth durch $\frac{P_n}{Q_n}$ angedeutet werden möge,

entsteht aber aus dem in (3) dadurch, dafs man $a_n + r_n$ für a_n setzt; es ist also

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{(a_n + r_n)\,p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{(a_n + r_n)\,q_{n-1} + b_n q_{n-2}}$$
$$= \frac{a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2} + p_{n-1} r_n}{a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2} + q_{n-1} r_n}$$

mithin, wenn man für p_n und q_n ihre Werthe aus (4) setzt,

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{p_n + p_{n-1} r_n}{q_n + q_{n-1} r_n}$$

Um nun die Differenz der Kettenbrüche (2) und (3) in Rechnung zu bekommen, ziehen wir beiderseits $\frac{p_n}{q_n}$ ab, wodurch bei Reduktion auf gleichen Nenner zum Vorschein kommt:

(5) $$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{p_n}{q_n}$$
$$= \frac{p_{n-1} q_n r_n - p_n q_{n-1} r_n}{(q_n + q_{n-1} r_n)\,q_n} = -\frac{r_n}{q_n + q_{n-1} r_n} \cdot \frac{p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}}{q_n}.$$

Es ist aber ferner

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}}{q_n q_{n-1}}$$

folglich durch beiderseitige Multiplikation mit q_{n-1}:

$$q_{n-1}\left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) = \frac{p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}}{q_n}.$$

Hier ist die rechte Seite nichts Anderes, als der zweite Faktor in der Gleichung (5). Substituiren wir dort die linke Seite unserer Gleichung für denselben, so wird

(6) $$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{p_n}{q_n} = -\frac{q_{n-1} r_n}{q_{n-1} r_n + q_n}\left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right).$$

Hier haben wir nun zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Es seien alle in (2) und (3) vorkommenden a, b und r, mithin sämmtliche Glieder und Reste positiv. Dann sind auch alle p und q positiv und der erste Faktor rechts in (6) ist ein ächter Bruch, der zweite eine Gröfse, welche beständig abnimmt, ohne dafs sie sich jedoch der Null zu nähern brauchte. Soll aber der gefundene Ausdruck sich der Null unbegränzt nähern, so mufs einer der beiden Faktoren selbst die Null zur Gränze haben.

Nun läfst sich der erste Faktor auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{1}{1 + \frac{q_n}{q_{n-1} r_n}}$$

und wenn diefs die Null zur Gränze haben soll, mufs

$$Lim \frac{q_n}{q_{n-1}\, r_n} = \infty$$

sein. Man hat aber ferner

$$\frac{q_n}{q_{n-1}\, r_n} = \frac{a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}}{q_{n-1}\, r_n} = \frac{a_n}{r_n} + \frac{b_n}{r_n} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$$

Hier ist nun ganz sicher $Lim \frac{q_n}{q_{n-1}\, r_n} = \infty$, wenn schon $Lim \frac{a_n}{r_n} = \infty$ ist, weil das, was zu $\frac{a_n}{r_n}$ noch hinzukommt, um die Gleichung herzustellen, eine positive Gröfse ist. Die Differenz zwischen den Kettenbrüchen (2) und (3) nähert sich also gewifs der Null, wenn

(7) $$Lim \frac{a_n}{r_n} = \infty$$

ist, was entweder dadurch geschehen kann, dafs $Lim\, a_n = \infty$ und $Lim\, r_n$ eine endliche Gröfse ist, oder dadurch, dafs $Lim\, a_n$ von Null verschieden und $Lim\, r_n = 0$ ist, wie wir früher unmittelbar bemerkt haben. Da der erste Faktor in (6) ein ächter Bruch bleibt, so könnte

$$Lim \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{p_n}{q_n}\right) = 0$$

auch dann werden, wenn $Lim \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$, d. h. $Lim\, \Delta_{n-1} = 0$ würde. Diesen Fall haben wir schon untersucht; er ist derjenige, in welchem der Kettenbruch (3) convergirt. Die Differenz zwischen den Kettenbrüchen (2) und (3) nähert sich also auch dann der Null, wenn der letztere convergirt, was immer geschieht, wenn

(8) $$Lim \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} > 0$$

ist, wie bereits gezeigt worden ist.

II. Weniger einfach gestalten sich die Resultate, wenn die Gröfsen $b_2, b_3, b_4, \ldots$ und r_n negativ, also die Glieder, mit Ausnahme des ersten, negativ sind und die Kettenbrüche (2) und (3) die Form haben:

(9) $$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots - \cfrac{b_n}{a_n - r_n}}}}$$

(10)
$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots - \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

Hier ist dann
$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_{n-1} r_n}{-q_{n-1} r_n + q_n} \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$$
oder

(11)
$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{\frac{q_n}{q_{n-1} r_n} - 1} \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$$

Hieraus ersieht man erstlich, daſs die fragliche Differenz zwischen den Kettenbrüchen (9) und (10) sich der Null nähert, wenn dieſs mit r_n der Fall ist, was wir schon früher unmittelbar bemerkt haben. Es giebt aber noch einen zweiten, günstigeren Fall. Ist nämlich der Kettenbruch (10) ein convergenter, was immer statt findet, wenn seine einzelnen Glieder ächte Brüche sind, so hat man
$$Lim \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) = 0$$
Daraus allein folgt aber noch nicht, daſs der Ausdruck in (11) sich der Null nähert, weil es geschehen könnte, daſs in dem ersten Faktor
$$Lim \frac{q_n}{q_{n-1} r_n} = 1$$
mithin
$$Lim \frac{1}{\frac{q_n}{q_{n-1} r_n} - 1} = \infty$$
wäre. Es würde dann der ganze in Rede stehende Ausdruck aus zwei Faktoren zusammengesetzt sein, von denen der eine immer zu-, der andere beständig abnähme, und es könnte dann das Produkt eine endliche Gröſse zur Gränze haben. Wir müssen daher noch darauf sehen, daſs $Lim \frac{q_n}{q_{n-1} r_n}$ von der Einheit verschieden sei. Sind nun alle Nenner a gröſser als die Zähler b, was wir der Convergenz wegen voraussetzen müssen, so ist jeder Näherungsnenner q_n gröſser als der vorhergehende q_{n-1} *), mithin $\frac{q_n}{q_{n-1}} > 1$. Dieſs hindert aber nicht, daſs $Lim \frac{q_n}{q_{n-1}} = 1$ sei (wie z. B. $Lim \frac{m+1}{m}$ für wachsende m). Ferner ist

*) Der Beweis davon, daſs hier immer $q_n > q_{n-1}$ ist, lautet kurz: Gesetzt, man wüſste schon, daſs $q_{n-1} > q_{n-2}$ sei, so muſs auch

$$Lim \frac{q_n}{q_{n-1} r_n} = Lim \frac{q_n}{q_{n-1}} \cdot Lim \frac{1}{r_n}$$

Da nun möglicher Weise der erste Faktor sich der Einheit nähern kann, so mufs, wenn wir sicher gehen wollen, $Lim \frac{1}{r_n}$ von der Einheit verschieden sein. Die Differenz zwischen den Kettenbrüchen (9) und (10) nähert sich also auch dann für wachsende n unbegränzt der Null, wenn der Kettenbruch (10) convergirt, was nur unter der Bedingung als gewifs behauptet werden kann, dafs alle die Brüche

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots$$

ganzzahlige ächte sind und wenn zugleich in (9) $Lim\, r_n \gtrless 1$ ist.

§. 79.

Verwandlung von Quadratwurzeln in Kettenbrüche.

Eines der einfachsten Beispiele für die Darstellung von Funktionen durch Kettenbrüche geben die Wurzeln der algebraischen Gleichungen zweiten Grades. Aus der quadratischen Gleichung

(1) $$x^2 + 2ax = b$$

findet man nämlich auf gewöhnlichem Wege

(2) $$x = -a \pm \sqrt{a^2 + b}$$

andererseits ist aber auch aus No. (1)

(3) $$x = \frac{b}{2a + x}$$

$$q_{n-1} > \frac{b_n}{a_n - 1} q_{n-2}$$

sein. Denn da wir $a_n > b_n$ und beide als ganze Zahlen voraussetzen, so mufs a_n wenigstens um eine Einheit $> b_n$ sein. Wäre im ungünstigsten Falle $a_n = b_n + 1$, so wäre $\frac{b_n}{a_n - 1} = 1$, also die obige Ungleichung richtig; ist aber a_n um mehr als eine Einheit von b_n verschieden, so ist $\frac{b_n}{a_n - 1}$ ein ächter Bruch, also q_{n-1} um so mehr gröfser als ein Theil von q_{n-2}, da es schon gröfser als das ganze q_{n-2} vorausgesetzt wird. Aus jener Ungleichheit folgt nun $(a_n - 1)\, q_{n-1} > b_n q_{n-2}$ oder $a_n q_{n-1} - b_n q_{n-2} > q_{n-1}$; oder vermöge des Werthes der linken Seite $q_n > q_{n-1}$. Ist also $q_{n-1} > q_{n-2}$, so ist auch $q_n > q_{n-1}$. Man hat aber $q_1 = a_1$, $q_2 = a_1 a_2 - b_2$; ferner offenbar $a_1 a_2 > a_1 + a_2$, ausgenommen im Falle $a_1 = a_2 = 2$; da aber $a_2 > b_2$ ist, so hat man gewifs in jedem Falle $a_1 a_2 > a_1 + b_2$, oder $a_1 a_2 - b_2 > a_1$, d. h. $q_2 > q_1$. Nach dem vorher bewiesenen Satze folgt nun für $n = 3$, $q_3 > q_2$, für $n = 4$, $q_4 > q_3$ u. s. f., also überhaupt

$$q_1 < q_2 < q_3 < q_4 \ldots$$

Die Nenner der successiven Näherungsbrüche bilden mithin eine steigende Reihe, w. z. b. w.

Indem man hier für x den ihm gleichgeltenden Bruch rechter Hand mehrmals substituirt, erhält man der Reihe nach

$$x = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + x}}$$

$$x = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + x}}}$$

u. s. f.

überhaupt, wenn man n Partialbrüche voraussetzt,

(4) $$x = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots + \cfrac{b}{2a + x}}}}$$

Soll nun dieser Kettenbruch ins Unendliche fortgehen, so müssen die Kriterien des vorigen Paragraphen herbeigezogen werden, da aus ihnen zu entscheiden ist, ob man das rechter Hand befindliche x weglassen darf oder nicht. Wir haben zu diesem Zwecke die Fälle zu unterscheiden, *ob* der Kettenbruch positive oder negative Glieder enthält.

I. Sind a und b positiv und verstehen wir unter x die positive Wurzel der Gleichung (1), so dafs also ausschliefslich

(5) $$x = -a + \sqrt{a^2 + b}$$

ist, so sind die Voraussetzungen erfüllt, welche wir unter No. I. des vorigen Paragraphen über die a und b, sowie über $r_n = x$ gemacht haben; ferner ist

$$Lim\, \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{4a^2}{b} > 0$$

indem wir den Fall $a = 0$ ausschliefsen. Wir haben daher für positive a und b ohne weitere Determination die Gleichung

$$x = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots \text{ in inf.}}}}$$

und indem wir für x seinen Werth aus No. (5) einsetzen

(6) $$\sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots}}}$$

Mittelst dieser Formel ist es sehr leicht, irrationale Quadratwurzeln in unendliche Kettenbrüche zu verwandeln; man hat hierzu nichts weiter nöthig, als die gegebene Zahl in zwei Theile zu zerlegen, von denen der erste ein Quadrat ist. Bei der Berechnung von $\sqrt{21}$ z. B. kann man $a = 2$ und $b = 17$ oder auch $a = 4$ und $b = 5$ nehmen; diefs giebt

$$\sqrt{21} = 2 + \cfrac{17}{4 + \cfrac{17}{4 + \cfrac{17}{4 + \ldots}}}$$

$$\sqrt{21} = 4 + \cfrac{5}{8 + \cfrac{5}{8 + \cfrac{5}{8 + \ldots}}}$$

II. Etwas anders wird die Sache, wenn der Kettenbruch (4) negative Glieder enthält. Gehen wir nämlich von der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2ax = -b$$

aus, so folgt zunächst

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - b} \tag{7}$$

andererseits unmittelbar

$$x = \frac{b}{2a - x}$$

mithin durch mehrmalige Substitution dieses Werthes

$$x = \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \ldots - \cfrac{b}{2a - x}}}} \tag{8}$$

Wollen wir diesen Kettenbruch ins Unendliche fortsetzen, so mufs nach den in No. II. des vorigen Paragraphen gegebenen Erörterungen entweder $r_n = x$ die Null zur Gränze haben, oder der Kettenbruch mufs convergiren und zugleich x von der Einheit verschieden sein. Die erste Bedingung ist hier wegen der Unveränderlichkeit des x nicht erfüllt und wir können uns daher nur an die zweite halten. Nun findet Convergenz statt für $2a > b$, und damit $a \pm \sqrt{a^2 - b}$ nicht $= 1$ werde, mufs $\pm \sqrt{a^2 - b} \gtrless 1 - a$ d. h. $a^2 - b \gtrless (1 - a)^2$ oder endlich $2a \gtrless b + 1$ sein. Nehmen wir hier das obere Zeichen, so ist die vorige Bedingung mit erfüllt und wir haben dann

$$(9)\qquad x = \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \ldots \text{ in inf.}}}}$$

Hier ist noch zu bestimmen, welcher von den beiden positiven Werthen des x durch den Kettenbruch dargestellt wird; für diese Bestimmung reicht es hin, zu bemerken, dafs der Gränzwerth des ganzen Kettenbruches ein ächter Bruch sein mufs, weil seine einzelnen Glieder selbst derartige Brüche sind; nun findet man aber, dafs zufolge der Determination $2a > b + 1$

$$a + \sqrt{a^2 - b} > 1 \quad \text{und} \quad a - \sqrt{a^2 - b} < 1$$

ist, und es darf daher nur das untere Vorzeichen, also x nur $= a - \sqrt{a^2 - b}$ genommen werden. Mittelst dieses Werthes von x ergiebt sich aus der Formel (9)

$$(10)\qquad \sqrt{a^2 - b} = a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \ldots}}}\,, \quad 2a > b + 1.$$

In dem Falle $2a = b + 1$ ist nach den früheren Untersuchungen (S. 304) die Einheit der Gesammtwerth des Kettenbruches; dasselbe Resultat liefert auch die obige Formel und sie gilt daher unter der erweiterten Bedingung $2a \geqq b + 1$.

Für $2a < b + 1$ darf man die Richtigkeit der Formel (10) nicht mehr behaupten, ja sie würde sogar bei dieser Ausdehnung auf Widersprüche führen; für $a = 2$, $b = 17$ z. B. erhielte man

$$\sqrt{-13} = 2 - \cfrac{17}{4 - \cfrac{17}{4 - \ldots}}$$

und diefs ist offenbar unrichtig, da der Kettenbruch, wie weit er auch fortgesetzt werden möge, immer nur reelle Werthe besitzt und diese reellen Brüche eine imaginäre Zahl nicht zur Gränze haben können.

Capitel XX.
Die Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche.

§. 80.
Verwandlung einer beliebigen Reihe.

Das Verfahren, dessen wir uns bedient haben, um gewöhnliche Brüche und Quadratwurzeln in Kettenbrüche umzugestalten, kann mit einer kleinen Modifikation auch auf jede endliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

angewendet werden. Bezeichnen wir die Summe derselben mit $f(n)$ und den Quotienten $\frac{1}{u_k}$ mit v_k, so ist zunächst

$$(1) \qquad f(n) = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_{n-1}} + \frac{1}{v_n}$$

und auf ganz gleiche Weise

$$f(n-1) = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_{n-1}},$$

und mithin durch beiderseitige Vergleichung

$$f(n) = f(n-1) + \frac{1}{v_n} = \frac{v_n f(n-1) + 1}{v_n}.$$

Durch Umkehrung und Subtraktion von v_n folgt weiter

$$\frac{1}{f(n)} - v_n = \frac{-(v_n)^2 f(n-1)}{v_n f(n-1) + 1} = -\frac{(v_n)^2}{v_n + \frac{1}{f(n-1)}}$$

oder, symmetrischer dargestellt,

$$\frac{1}{f(n)} - v_n = -\frac{(v_n)^2}{v_n + v_{n-1} + \left[\frac{1}{f(n-1)} - v_{n-1}\right]}$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung wie folgt

$$(2) \qquad \frac{1}{f(n)} - v_n = \varphi(n)$$

so geht die vorhergehende Gleichung in die nachstehende über

$$(3) \qquad \varphi(n) = -\frac{(v_n)^2}{v_n + v_{n-1} + \varphi(n-1)}$$

Dieser lassen sich folgende ähnlich gebildete Gleichungen an die Seite stellen:

$$\varphi(n-1) = -\frac{(v_{n-1})^2}{v_{n-1}+v_{n-2}+\varphi(n-2)}$$

$$\varphi(n-2) = -\frac{(v_{n-2})^2}{v_{n-2}+v_{n-3}+\varphi(n-3)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi(2) = -\frac{(v_2)^2}{v_2+v_1+\varphi(1)}$$

$$\varphi(1) = -\frac{(v_1)^2}{v_1+v_0+\varphi(0)}$$

und hierbei ist in der letzten Gleichung $\varphi(0) = \frac{1}{f(0)} - v_0 = \frac{1}{\frac{1}{v_0}} - v_0 = 0$. Indem man nun jede Gleichung in ihre Vorgängerin substituirt und auf diese Weise bis zur Gleichung (3) rückwärts schreitet, ergiebt sich

$$\varphi(n) = -\cfrac{(v_n)^2}{v_n+v_{n-1}-\cfrac{(v_{n-1})^2}{v_{n-1}+v_{n-2}-\cfrac{(v_{n-2})^2}{v_{n-2}+v_{n-3}-\cdots-\cfrac{(v_1)^2}{v_1+v_0}}}}$$

Aus der Formel (2) folgt aber

$$f(n) = \frac{1}{v_n+\varphi(n)}$$

und hier kann man den soeben für $\varphi(n)$ gefundenen Kettenbruch einsetzen. Substituirt man zugleich für $f(n)$ die ursprüngliche Reihe mit umgekehrter Anordnung der Glieder, so ist

$$\frac{1}{v_n}+\frac{1}{v_{n-1}}+\frac{1}{v_{n-2}}+\cdots+\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_0}$$

$$= \cfrac{1}{v_n-\cfrac{(v_n)^2}{v_n+v_{n-1}-\cfrac{(v_{n-1})^2}{v_{n-1}+v_{n-2}-\cfrac{(v_{n-2})^2}{v_{n-2}+v_{n-3}-\cdots-\cfrac{(v_1)^2}{v_1+v_0}}}}}$$

oder endlich, wenn $v_n = t_0$, $v_{n-1} = t_1$, $v_{n-2} = t_2$ etc. gesetzt wird,

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{t_0}+\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}$$

$$= \cfrac{1}{t_0-\cfrac{(t_0)^2}{t_0+t_1-\cfrac{(t_1)^2}{t_1+t_2-\cfrac{(t_2)^2}{t_2+t_3-\cdots-\cfrac{(t_{n-1})^2}{t_{n-1}+t_n}}}}}$$

Diese Formel dient nun zur Verwandlung einer endlichen Reihe in einen endlichen Kettenbruch. Enthält die Reihe wechselnde Vorzeichen, so ist dasselbe Verfahren anwendbar und giebt

(5)
$$\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} - \dots + \frac{(-1)^n}{t_n}$$
$$= \cfrac{1}{t_0 + \cfrac{(t_0)^2}{t_1 - t_0 + \cfrac{(t_1)^2}{t_2 - t_1 + \cfrac{(t_2)^2}{t_3 - t_2 + \dots + \cfrac{(t_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}}}}}$$

wie man auch kürzer aus der Formel (4) findet, indem man $-t_1$, $-t_3$, $-t_5$ etc. an die Stellen von t_1, t_3, t_5 etc. treten läfst.

Es hat keine Schwierigkeit, aus den Formeln (4) und (5) noch andere abzuleiten, welche sich auf besondere Voraussetzungen beziehen. Nimmt man z. B.

$$t_0 = \frac{a_0}{x^0}, \quad t_1 = \frac{a_1}{x}, \quad t_2 = \frac{a_2}{x^2}, \quad \dots$$

und schafft die Brüche aus den einzelnen Gliedern der Kettenbrüche weg, so findet man:

(6)
$$\frac{1}{a_0} + \frac{x}{a_1} + \frac{x^2}{a_2} + \dots + \frac{x^n}{a_n}$$
$$= \cfrac{1}{a_0 - \cfrac{(a_0)^2 x}{a_0 x + a_1 - \cfrac{(a_1)^2 x}{a_1 x + a_2 - \cfrac{(a_2)^2 x}{a_2 x + a_3 - \dots - \cfrac{(a_{n-1})^2 x}{a_{n-1} x + a_n}}}}}$$

(7)
$$\frac{1}{a_0} - \frac{x}{a_1} + \frac{x^2}{a_2} - \dots + \frac{(-1)^n x^n}{a_n}$$
$$= \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{(a_0)^2 x}{a_1 - a_0 x + \cfrac{(a_1)^2 x}{a_2 - a_1 x + \cfrac{(a_2)^2 x}{a_3 - a_2 x + \dots + \cfrac{(a_{n-1})^2 x}{a_n - a_{n-1} x}}}}}$$

Für $a_0 = \alpha_0$, $a_1 = \alpha_0 \alpha_1$, $a_2 = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2$ u. s. f. ergiebt sich hieraus nach gehöriger Hebung

(8)
$$\frac{1}{\alpha_0} + \frac{x}{\alpha_0\alpha_1} + \frac{x^2}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} + \cdots + \frac{x^n}{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n}$$
$$= \cfrac{1}{\alpha_0 - \cfrac{\alpha_0 x}{\alpha_1 + x - \cfrac{\alpha_1 x}{\alpha_2 + x - \cfrac{\alpha_2 x}{\alpha_3 + x - \cdots - \cfrac{\alpha_{n-1} x}{\alpha_n + x}}}}}$$

(9)
$$\frac{1}{\alpha_0} - \frac{x}{\alpha_0\alpha_1} + \frac{x^2}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} - \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n}$$
$$= \cfrac{1}{\alpha_0 + \cfrac{\alpha_0 x}{\alpha_1 - x + \cfrac{\alpha_1 x}{\alpha_2 - x + \cfrac{\alpha_2 x}{\alpha_3 - x + \cdots + \cfrac{\alpha_{n-1} x}{\alpha_n - x}}}}}$$

Nimmt man beispielsweis in der Formel (8)

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{n}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{n-1}, \quad \alpha_3 = \frac{3}{n-2}, \quad \ldots .$$

so steht linker Hand die binomische Reihe, setzt man dafür ihre Summe $(1+x)^n$ und schafft rechter Hand die Brüche weg, so findet sich

(10)
$$(1+x)^n$$
$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{nx}{nx + 1 - \cfrac{1\,.\,(n-1)\,x}{(n-1)\,x + 2 - \cfrac{2\,.\,(n-2)\,x}{(n-2)\,x + 3 - \cdots - \cfrac{(n-1)\,.\,1x}{1x + n}}}}}$$

Aus den bisherigen Kettenbrüchen für endliche Reihen lassen sich unmittelbar Kettenbrüche für unendliche Reihen herleiten, indem man die Zahl $n+1$, welche die Anzahl der Reihenglieder und ebenso der Kettenbruchglieder bestimmt, ins Unendliche wachsen läfst. Eine besondere Vorsicht hierbei ist nicht nöthig, denn jeder Näherungsbruch des Kettenbruches bildet den Repräsentanten von so viel Gliedern der Reihe, als er selbst Glieder enthält; convergirt also die unendliche Reihe, so mufs der Kettenbruch ebenfalls convergiren, und auf gleiche Weise zieht die Divergenz der Reihe die Divergenz des Kettenbruches nach sich. So hat man z. B. aus No. (7) für

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 7, \quad \ldots$$

wenn die Reihe ins Unendliche fortgesetzt wird,

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{7} + \dots$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2 x}{3 - 1x + \cfrac{3^2 x}{5 - 3x + \cfrac{5^2 x}{7 - 5x + \dots}}}}$$

Für $x \lesseqgtr 1$ convergirt die Reihe linker Hand; setzt man $x = z^2$ und multiplizirt beiderseits mit z, so läfst sich die Summe der Reihe angeben und ist $Arctan\, z$; man gelangt so zu der Formel

(11) $$Arctan\, z = \cfrac{z}{1 + \cfrac{(1z)^2}{1 - 1z^2 + \cfrac{(3z)^2}{5 - 3z^2 + \cfrac{(5z)^2}{7 - 5z^2 + \dots}}}} \qquad z \lesseqgtr 1.$$

Für $z = 1$ liefert sie das zuerst von Brounker angegebene Resultat:

(12) $$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \dots}}}}$$

welches die Umsetzung der Leibnitz'schen Reihe in einen unendlichen Kettenbruch darstellt und ebendefswegen dieselbe langsame Convergenz wie jene Reihe besitzt. — Aus der Formel (8) findet man ebenso leicht für $\alpha_0 - 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$ etc.

(13) $$e^x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + x - \cfrac{1x}{2 + x - \cfrac{2x}{3 + x - \dots}}}}$$

und es würde überhaupt nun keine Schwierigkeit mehr haben, sämmtliche bisher entwickelte Reihen in Kettenbrüche umzusetzen.

§. 81.

Verwandlung einer Reihe von besonderer Form.

Bei den Untersuchungen des vorigen Paragraphen blieb die Reihe, um deren Verwandlung in einen Kettenbruch es sich handelte, völlig allgemein; ist dieselbe aber von besonderer Form, so können besondere Methoden angewendet werden. In dieser Beziehung ist die Reihe

$$1+\frac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\,.\,\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\,.\,\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

von Interesse, welche die meisten der in der algebraischen Analysis vorkommenden Reihen als spezielle Fälle in sich enthält. Sie convergirt für alle x, deren absoluter Werth weniger als die Einheit beträgt, wie auch sonst α, β und γ beschaffen sein mögen, für $x = 1$ convergirt sie unter der Bedingung $\gamma > \alpha + \beta$, was man unter Anwendung der in §. 52. entwickelten Lehren bald finden wird. Unter Voraussetzung ihrer Convergenz bezeichnen wir ihre Summe mit $F(\alpha, \beta, \gamma)$, so dafs also die Gleichung

$$(1)\quad F(\alpha,\beta,\gamma)=1+\frac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\,.\,\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\,.\,\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

statt findet; es ist dann auf gleiche Weise

$$(2)\quad F(\alpha,\beta+1,\gamma+1)=1+\frac{\alpha\,.\,(\beta+1)}{1\,.\,(\gamma+1)}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\,.\,(\beta+1)(\beta+2)}{1\,.\,2\,.\,(\gamma+1)(\gamma+2)}x^2$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\,.\,(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}x^3+\ldots$$

und wenn man hiervon die Gleichung (1) abzieht, so ergiebt sich das wichtige Resultat, dafs die Differenz der beiden obigen Reihen wiederum eine Reihe von derselben Form ist. Man hat nämlich

$$F(\alpha,\beta+1,\gamma+1)-F(\alpha,\beta,\gamma)=$$
$$\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}\left[1+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{1\,.\,(\gamma+2)}x+\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+1)(\beta+2)}{1\,.\,2\,.\,(\gamma+2)(\gamma+3)}x^2+\ldots\right]$$

d. i.

$$(3)\quad F(\alpha,\beta+1,\gamma+1)-F(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2)$$

Diese Eigenschaft läfst sich benutzen, um zunächst den Quotienten der Reihen (1) und (2) und dann die Reihe (2) oder (1) selbst in einen Kettenbruch zu verwandeln. Man erhält nämlich aus der Gleichung (3) durch Division mit $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)$ sehr leicht

$$(4)\quad 1-\frac{F(\alpha,\beta,\gamma)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1)}=\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{1}{\dfrac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1)}{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2)}}$$

Hier wollen wir der Kürze wegen

$$(5)\quad \frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}=f(\alpha,\beta,\gamma)$$

und

$$(6)\qquad \frac{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)} = \psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$$

setzen. Wollen wir durch Einführung dieser Abkürzungen die Gleichung (4) in die möglichst bequeme Form bringen, so wird es zuvörderst nöthig, den auf der rechten Seite dort vorkommenden Quotienten

$$\frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)}{F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)}$$

ebenfalls durch die Funktion ψ auszudrücken. Vertauschen wir zu diesem Zwecke die Gröfsen α und β in der Gleichung (6), so erhalten wir

$$(7)\qquad \psi(\beta,\ \alpha,\ \gamma) = \frac{F(\beta,\ \alpha,\ \gamma)}{F(\beta,\ \alpha+1,\ \gamma+1)}$$

Da nun aber die Gröfsen α und β in $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ symmetrisch vorkommen, so kann man sie ihre Plätze wechseln lassen, ohne dafs $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ seinen Werth änderte. In der That ist

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\,.\,\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\ \beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots$$
$$= 1 + \frac{\beta\alpha}{1\,.\,\gamma}x + \frac{\beta(\beta+1)\ \alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots$$

d. h. $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = F(\beta,\ \alpha,\ \gamma)$ und aus demselben Grunde hat man auch $F(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma+1) = F(\beta,\ \alpha+1,\ \gamma+1)$. Unter Benutzung dieser Resultate geht die Gleichung (7) in die nachstehende über:

$$\psi(\beta,\ \alpha,\ \gamma) = \frac{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{F(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma+1)}$$

aus welcher dadurch, dafs man $\beta+1$ und $\gamma+1$ für β und γ setzt, die folgende entspringt:

$$\psi(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1) = \frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)}{F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)}$$

Der hier stehende Quotient ist aber derselbe, welcher auf der rechten Seite der Gleichung (4) vorkommt; substituiren wir also seinen Werth dort hinein, so ergiebt sich wegen der Abkürzungen in (5) und (6)

$$1 - \psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\,\frac{1}{\psi(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1)}$$

oder

$$(8)\qquad \psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = 1 - \frac{f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{\psi(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1)}$$

Setzt man hier für α, β, γ der Reihe nach: $\beta+1$, α, $\gamma+1$, so wird

$$(9)\qquad \psi(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1) = 1 - \frac{f(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1)}{\psi(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)}$$

Substituirt man ferner in (8) $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+2$ für α, β, γ, so ist

$$(10)\quad \psi(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2) = 1 - \frac{f(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)}{\psi(\beta+2,\ \alpha+1,\ \gamma+3)}$$

und wenn man für α, β, γ in (8) der Reihe nach $\beta+2$, $\alpha+1$, $\gamma+3$ einführt,

$$(11)\quad \psi(\beta+2,\ \alpha+1,\ \gamma+3) = 1 - \frac{f(\beta+2,\ \alpha+1,\ \gamma+3)}{\psi(\alpha+2,\ \beta+2,\ \gamma+4)}$$

Man kann auf diese Weise beliebig weit gehen.

Will man nach einer gefundenen Gleichung eine weitere bringen, so substituirt man in die Gleichung (8) für α, β, γ der Reihe nach diejenigen Gröfsen und in der Ordnung, wie sie im Nenner auf der rechten Seite der schon gefundenen Gleichung hinter ψ stehen. Ein paar allgemeine auf einander folgende Gleichungen dieser Art würden sein:

$$(12)\quad \psi(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+2n) = 1 - \frac{f(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+2n)}{\psi(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)}$$

$$(13)\quad \psi(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1) = 1 - \frac{f(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)}{\psi(\alpha+n+1,\ \beta+n+1,\ \gamma+2n+2)}$$

von welchen die erste als allgemeiner Typus für die Gleichungen (8) und (10), die zweite für (9) und (11) gilt.

Substituirt man in jede dieser Gleichungen die nächste, indem man bei (8) anfängt und etwa bei (12) aufhört, so wird

$$\psi(\alpha,\beta,\gamma) = 1 - \cfrac{f(\alpha,\beta,\gamma)}{1 - \cfrac{f(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1)}{1 - \cfrac{f(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)}{1 - \cfrac{f(\beta+2,\ \alpha+1,\ \gamma+3)}{1 - \cdots - \cfrac{f(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+2n)}{\psi(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)}}}}}$$

Vermöge der Bedeutung von $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$ ist nun

$$\frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)} = \frac{1}{\psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}$$

folglich

$$(14)\quad \frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{f(\alpha,\beta,\gamma)}{1 - \cfrac{f(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1)}{1 - \cfrac{f(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)}{1 - \cfrac{f(\beta+2,\ \alpha+1,\ \gamma+3)}{1 - \cdots - \cfrac{f(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+2n)}{\psi(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)}}}}}}$$

und dabei sind die verschiedenen Werthe der mit f bezeichneten Funktion nach (5) folgende:

$$f(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}x$$
$$f(\beta+1,\alpha,\gamma+1) = \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x$$
$$f(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2) = \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}x$$
$$f(\beta+2,\alpha+1,\gamma+3) = \frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}x$$

u. s. f.

deren Gesetz leicht zu übersehen ist.

Um nun den Kettenbruch (14) ins Unendliche fortsetzen zu können, ist zuvörderst noch eine Bemerkung nöthig. Der fragliche Kettenbruch steht unter der Form

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{k_0}{1-\cfrac{k_1}{1-\cfrac{k_2}{1-\ldots-\cfrac{k_{2n}}{\varrho_{2n}}}}}}$$

$$=\cfrac{1}{1-\cfrac{k_0}{1-\cfrac{k_1}{1-\cfrac{k_2}{1-\ldots-\cfrac{k_{2n}}{1-(1-\varrho_{2n})}}}}}$$

Setzen wir hier $1-\varrho_{2n}=r_{2n}$, so geht der Kettenbruch ganz in die Form des Kettenbruches (9) in §. 78. über, und es ist erlaubt, den Rest r_{2n} wegzulassen, wenn sich derselbe für wachsende n unbegränzt Null nähert, d. h. wenn

$$Lim\ \varrho_{2n} = 1$$

ist. Dieser Umstand findet aber in der That statt; es ist nämlich

$$\varrho_{2n} = \psi(\beta+n+1,\alpha+n,\gamma+2n+1) = \frac{F(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)}{F(\beta+n+1,\ \alpha+n+1,\ \gamma+2n+2)}$$
$$=\frac{F(\alpha+n,\ \beta+n+1,\ \gamma+2n+1)}{F(\alpha+n+1,\ \beta+n+1,\ \gamma+2n+2)}$$
$$=\frac{1+\frac{(\alpha+n)(\beta+n+1)}{1\,.\,(\gamma+2n+1)}x+\frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\beta+n+1)(\beta+n+2)}{1\,.\,2\,.\,(\gamma+2n+1)(\gamma+2n+2)}x^2+\ldots}{1+\frac{(\alpha+n+1)(\beta+n+1)}{1\,.\,(\gamma+2n+2)}x+\frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)(\beta+n+1)(\beta+n+2)}{1\,.\,2\,.\,(\gamma+2n+2)(\gamma+2n+3)}x^2+\ldots}$$

und um diesen Quotienten genauer untersuchen zu können, erinnern wir an die Definition der sogenannten Mittelgröfse zwischen gegebenen

Gröfsen. Sind nämlich $a, b, c, d, \ldots$ beliebige gegebene Zahlen, die wir der Einfachheit wegen als sämmtlich positiv voraussetzen wollen, und nennen wir g die gröfste und k die kleinste derselben, so heifst Mittelgröfse zwischen $a, b, c, d, \ldots$ jede Zahl, die nicht gröfser als g und nicht kleiner als k ist, und sie wird durch $M(a, b, c, d, \ldots)$ bezeichnet. Von diesen Mittelgröfsen gilt der Satz*)

$$\frac{B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + \ldots}{A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots} = M\left(\frac{B_0}{A_0}, \frac{B_1}{A_1}, \frac{B_2}{A_2}, \frac{B_3}{A_3}, \ldots\right)$$

vorausgesetzt, dafs der linker Hand verzeichnete Quotient im Zähler und Nenner gleichviel Glieder enthält. Nehmen wir n so grofs, dafs $\alpha + n$, $\beta + n$ und $\gamma + n$ sämmtlich positiv ausfallen, so giebt die Anwendung dieses Satzes

$$\varrho_{2n} = M\left[1, \frac{(\alpha+n)(\gamma+2n+2)}{(\alpha+n+1)(\gamma+2n+1)}, \frac{(\alpha+n)(\gamma+2n+3)}{(\alpha+n+2)(\gamma+2n+2)}, \ldots\right]$$

und wenn n unendlich wächst,

$$Lim\, \varrho_{2n} = M[1, 1, 1, \ldots.]$$

d. h. $Lim\, \varrho_{2n} = 1$. Wir sind demnach berechtigt, den unter No. (14)

---

*) Der Beweis desselben lautet: Nennen wir G den gröfsten und K den kleinsten unter den Quotienten $\frac{B_0}{A_0}, \frac{B_1}{A_1}, \frac{B_2}{A_2}$ etc., indem wir dieselben als positiv voraussetzen, so sind die Differenzen

$$G - \frac{B_0}{A_0}, \quad G - \frac{B_1}{A_1}, \quad G - \frac{B_2}{A_2}, \quad \ldots.$$

und

$$\frac{B_0}{A_0} - K, \quad \frac{B_1}{A_1} - K, \quad \frac{B_2}{A_2} - K, \quad \ldots.$$

sämmtlich positiv. Dasselbe gilt noch, wenn man diese Differenzen mit den Faktoren $A_0, A_1, A_2, \ldots$ multiplizirt; demnach sind die Ausdrücke

$$A_0G - B_0, \quad A_1G - B_1, \quad A_2G - B_2, \quad \ldots.$$
$$B_0 - A_0K, \quad B_1 - A_1K, \quad B_2 - A_2K, \quad \ldots.$$

positiv und ebenso sind es ihre Summen. Man hat demnach durch Vereinigung der in jeder Horizontalreihe befindlichen Differenzen

$$(A_0 + A_1 + A_2 + \ldots)\, G - (B_0 + B_1 + B_2 + \ldots) > 0$$
$$(B_0 + B_1 + B_2 + \ldots) - (A_0 + A_1 + A_2 + \ldots)\, K > 0$$

und hieraus findet man auf der Stelle

$$G > \frac{B_0 + B_1 + B_2 + \ldots}{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots}$$
$$K < \frac{B_0 + B_1 + B_2 + \ldots}{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots}$$

was mit der im Texte stehenden Behauptung identisch wird, wenn man die erwähnte Bezeichnung der Mittelgröfsen anwendet.

verzeichneten Kettenbruch ins Unendliche fortzusetzen; vermöge der Bedeutung der Funktion f giebt diefs:

$$(15)\quad \frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{\cfrac{\alpha(\gamma-\beta)\,x}{\gamma(\gamma+1)}}{1 - \cfrac{\cfrac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)\,x}{(\gamma+1)(\gamma+2)}}{1 - \cfrac{\cfrac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)\,x}{(\gamma+2)(\gamma+3)}}{1 - \cfrac{\cfrac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)\,x}{(\gamma+3)(\gamma+4)}}{1 - \ldots\ldots\ldots}}}}}$$

und dieses Resultat ist so lange richtig, als die mit $F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)$ und $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ bezeichneten Reihen convergiren.

Aus dieser sehr allgemeinen, zuerst von Gaufs entwickelten Relation lassen sich neue Kettenbrüche für die wichtigsten in der algebraischen Analysis vorkommenden Funktionen ableiten.

§. 82.

Kettenbrüche für einige der wichtigsten Funktionen.

I. Nehmen wir in Formel (15) $\beta=0$, so wird $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=1$ und es bleibt der Zähler allein stehen, so dafs sich ergiebt:

$$(1)\quad 1 + \frac{\alpha}{\gamma+1}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}x^3 + \ldots$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{\frac{\alpha}{\gamma+1}\,x}{1 - \cfrac{\frac{1\,.\,(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\,x}{1 - \cfrac{\frac{(\alpha+1)(\gamma+1)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}\,x}{1 - \cfrac{\frac{2\,.\,(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}\,x}{1 - \ldots\ldots\ldots}}}}}$$

Spezielle Fälle hiervon sind: erstlich $\gamma=0$, $\alpha=-\mu$, wodurch man links die Binomialreihe, und somit die Gleichung

$$(2)\qquad (1-x)^{\mu} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{\mu}{1}\,x}{1 - \cfrac{\frac{1\,.\,(\mu+1)}{1\,.\,2}\,x}{1 + \cfrac{\frac{1\,.\,(\mu-1)}{2\,.\,3}\,x}{1 - \cfrac{\frac{2\,.\,(\mu+2)}{3\,.\,4}\,x}{1 + \cfrac{\frac{2\,.\,(\mu-2)}{4\,.\,5}\,x}{1 - \ldots\ldots}}}}}}$$

erhält, welche aber nur unter den Bedingungen gilt, unter denen die Binomialreihe convergirt; zweitens $\alpha = \beta = 1$ und dabei x negativ genommen, woraus sich ergiebt:

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 - \ldots$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}\,x}{1 + \cfrac{\frac{1\,.\,1}{2\,.\,3}\,x}{1 + \cfrac{\frac{2\,.\,2}{3\,.\,4}\,x}{1 + \cfrac{\frac{2\,.\,2}{4\,.\,5}\,x}{1 + \cfrac{\frac{3\,.\,3}{5\,.\,6}\,x}{1 + \ldots}}}}}}$$

oder nach beiderseitiger Multiplikation mit x,

$$(3)\qquad l(1+x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{\frac{1\,.\,1}{1\,.\,2}\,x}{1 + \cfrac{\frac{1\,.\,1}{2\,.\,3}\,x}{1 + \cfrac{\frac{2\,.\,2}{3\,.\,4}\,x}{1 + \cfrac{\frac{2\,.\,2}{4\,.\,5}\,x}{1 + \ldots}}}}}\qquad 1 \geqq x > -1$$

Aus dem Kettenbruche in (2) läfst sich noch ein anderer für e^x ableiten. Setzt man nämlich m für μ und $-\frac{x}{m}$ für x, so wird

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{1}{1}x}{1+\cfrac{\frac{1}{2}\left(x+\frac{x}{m}\right)}{1-\cfrac{\frac{1}{2\,.\,3}\left(x-\frac{x}{m}\right)}{1+\cfrac{\frac{2}{3\,.\,4}\left(x+\frac{2x}{m}\right)}{1-\cfrac{\frac{2}{4\,.\,5}\left(x-\frac{2x}{m}\right)}{1+\ldots\ldots\ldots}}}}}}$$

und wenn man zur Gränze für unendlich wachsende m übergeht:

$$e^x = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{1}{1}x}{1+\cfrac{\frac{1}{2}x}{1-\cfrac{\frac{1}{2\,.\,3}x}{1+\cfrac{\frac{2}{3\,.\,4}x}{1-\cfrac{\frac{2}{4\,.\,5}x}{1+\cfrac{\frac{3}{5\,.\,6}x}{1-\cfrac{\frac{3}{6\,.\,7}x}{1+\ldots\ldots}}}}}}}}$$

Schafft man hier der Reihe nach durch Hebung so viel Brüche als möglich weg, so geht die vorstehende Gleichung in die einfachere über:

(4) $$e^x = \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{3+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{5+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{7+\cfrac{x}{2-\ldots}}}}}}}}}$$

wonach sich auch der Werth von e näherungsweis berechnen liefse.

Nimmt man in der Gleichung (1) $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$ und setzt x^2 für x, so wird

$$1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{7}x^6 + \dots$$
$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{\frac{1^2}{1.3}x^2}{1 - \cfrac{\frac{2^2}{3.5}x^2}{1 - \cfrac{\frac{3^2}{5.7}x^2}{1 - \dots}}}}$$

und wenn man beiderseits mit x multiplizirt und im Kettenbruche die Brüche aus den Zählern und Nennern der einzelnen Glieder wegschafft, so ist unter der Bedingung $1 > x > -1$:

$$(5) \qquad \frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x} = \cfrac{x}{1 - \cfrac{1^2 x^2}{3 - \cfrac{2^2 x^2}{5 - \cfrac{3^2 x^2}{7 - \cfrac{4^2 x^2}{9 - \dots}}}}}$$

Setzt man hier $z\sqrt{-1}$ für x, so ergiebt sich für $1 \geqq z \geqq -1$:

$$(6) \qquad Arctan\, z = \cfrac{z}{1 + \cfrac{1^2 z^2}{3 + \cfrac{2^2 z^2}{5 + \cfrac{3^2 z^2}{7 + \cfrac{4^2 z^2}{9 + \dots}}}}}$$

woraus man z. B. für $z = 1$ findet

$$(7) \qquad \frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \dots}}}}}$$

ein durch sein Bildungsgesetz sehr merkwürdiger Kettenbruch.

II. Kehren wir wieder zu der Gleichung (15) in §. 81. zurück und setzen dort $\frac{x^2}{\alpha\beta}$ für x, so haben wir

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 1 + \frac{x^2}{1 . \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)\,x^4}{1 . 2 . \gamma(\gamma+1)\,\alpha^2\beta^2} + \dots$$

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1) = 1 + \frac{(\beta+1)\,x^2}{1 . \beta(\gamma+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)\,(\beta+1)\,(\beta+2)\,x^4}{1 . 2 . (\gamma+1)\,(\gamma+2)\,\alpha^2\beta^2} + \dots$$

Nehmen wir hier $\beta = \alpha$, lassen dann α ins Unendliche wachsen und nennen U und V die Gränzwerthe der Reihensummen für unendlich wachsende α, so ist

$$(8) \quad U = 1 + \frac{x^2}{1 \cdot \gamma} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \cdots$$

$$(9) \quad V = 1 + \frac{x^2}{1 \cdot (\gamma+1)} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot (\gamma+1)(\gamma+2)} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)} + \cdots$$

und wenn wir auch im Kettenbruche $\frac{x^2}{\alpha\beta}$ für x setzen, darauf $\beta = \alpha$ ins Unendliche wachsen lassen,

$$\frac{V}{U} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{x^2}{\gamma(\gamma+1)}}{1 + \cfrac{\frac{x^2}{(\gamma+1)(\gamma+2)}}{1 + \cfrac{\frac{x^2}{(\gamma+2)(\gamma+3)}}{1 - \cdots\cdots}}}}$$

woraus nach Wegschaffung der Brüche folgt

$$(10) \qquad \frac{V}{U} = \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{x^2}{\gamma + 1 + \cfrac{x^2}{\gamma + 2 + \cfrac{x^2}{\gamma + 3 + \cdots}}}}$$

Eine sehr wichtige Substitution ist hier $\gamma = \frac{1}{2}$ und $\frac{x}{2}$ für x. Man erhält durch dieselbe

$$U = 1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots$$

d. i.

$$U = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ferner

$$V = 1 + \frac{x^2}{1 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^3} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$$

oder

$$U' = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$$

Setzt man auch in dem Kettenbruche $y = \frac{1}{2}$ und $\frac{x}{2}$ für x, schafft die Brüche weg und substituirt für U und V die gefundenen Werthe, so wird

$$\frac{e^x - e^{-x}}{x(e^x + e^{-x})} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{7 + \ldots}}}}$$

oder

(11)
$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{7 + \ldots}}}}$$

Hieraus folgt noch, wenn man $x\sqrt{-1}$ für x eintreten läfst,

(12)
$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots}}}}$$

Die letzten zwei Gleichungen sind besonders merkwürdig und bieten aufserdem noch durch ihre Form den Vortheil dar, dafs man mittelst des in §. 77. bewiesenen Theoremes über die irrationalen Werthe von e^x und $\tan x$ etwas Näheres aus ihnen erfahren kann. Bevor wir aber diese spezielleren Consequenzen ziehen, schalten wir erst eine allgemeinere Bemerkung ein, deren Zweck in der Erklärung des Unterschiedes besteht, welcher zwischen den hier gegebenen und den früher in §. 80. entwickelten Kettenbrüchen statt findet. Es läfst sich diefs am anschaulichsten machen, wenn man die beiden für $Arctan\, z$ gefundenen Kettenbrüche No. (11) in §. 80. und No. (6) dieses Paragraphen vergleicht. Die Näherungsbrüche jenes Kettenbruches sind:

$$\frac{z}{1}, \quad \cfrac{z}{1 + \cfrac{z^2}{3 - z^2}} = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3},$$

$$\cfrac{z}{1 + \cfrac{z^2}{3 - z^2 + \cfrac{9z^2}{5 - 3z^2}}} = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5}$$

u. s. w.

und sie repräsentiren also immer so viel Glieder der Reihe, als sie selbst Glieder enthalten. Der Kettenbruch (6) dagegen giebt

$$\frac{z}{1},\quad \frac{z}{1+\frac{z^2}{3}} = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{3^2} - \ldots$$

$$\frac{z}{1+\cfrac{z^2}{3+\cfrac{4z^2}{5}}} = \frac{z+\frac{4}{15}z^3}{1+\frac{9}{15}z^2} = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{3z^7}{25} + \ldots$$

u. s. w.

Die einzelnen Näherungsbrüche sind hier die Stellvertreter von unendlichen Reihen, die in so viel Gliedern mit der gegebenen Reihe übereinstimmen, als der Näherungsbruch Glieder enthält. Dieselbe Bemerkung wiederholt sich für alle Kettenbrüche der §§. 81. und 82., und darin liegt der wesentliche Unterschied zwischen den früheren und den jetzigen Verwandlungen der Reihen in Kettenbrüche.

§. 83.

Die Irrationalität der natürlichen Logarithmen und der Ludolph'schen Zahl.

I. Setzt man in der Gleichung (11) $x =$ einer rationalen Gröfse $\frac{m}{n}$, gleichviel ob gebrochen oder nicht, und bemerkt, dafs

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$$

ist, so wird

$$1 - \frac{2}{e^{\frac{2m}{n}}+1} = \cfrac{\frac{m}{n}}{1+\cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{3+\cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{5+\cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{7+\ldots\ldots}}}}$$

woraus sich nach Wegschaffung der Brüche in den einzelnen Gliedern des Kettenbruches leicht die Relation

$$(1)\qquad \frac{2}{e^{\frac{2m}{n}}+1} = 1 - \cfrac{m}{n+\cfrac{m^2}{3n+\cfrac{m^2}{5n+\cfrac{m^2}{7n+\ldots}}}}$$

ergiebt. Da in dem Kettenbruche die Zähler der einzelnen Glieder immer $= m^2$ sind, die Nenner dagegen fortwährend wachsen, so mufs früher oder später in demselben eine Stelle kommen, von welcher aus, abwärts gerechnet, alle Glieder des noch folgenden Kettenbruches ächte Brüche sind. Der Gränzwerth eines solchen Kettenbruches ist nach §. 77. irrational, folglich ist es dann auch der Gränzwerth des in (1) stehenden Kettenbruches, weil jedenfalls ein Theil desselben irrational sein mufs. Hieraus folgt unmittelbar die Irrationalität der linken Seite in der Gleichung (1) und diefs führt zu dem Satze, dafs für jedes rationale m und n die Potenz $e^{\frac{m}{n}}$ irrational ist.

Nehmen wir einfacher $n = 1$, so entspringt der merkwürdige Satz, dafs alle ganzen Potenzen der Grundzahl der natürlichen Logarithmen irrationale Gröfsen sind. In der Gleichung $e^z = y$ ist daher y irrational, wenn z rational ist; soll aber y rational werden, so mufs $z = log\, y$ irrational sein. Das natürliche Logarithmensystem hat also die merkwürdige Eigenschaft, dafs die Logarithmen aller rationalen Zahlen irrational sind, und hierdurch unterscheidet sich dasselbe wesentlich von allen anderen Systemen, die entweder rationale ganze Zahlen, oder algebraische Wurzeln aus solchen zu Grundzahlen haben, weil in jedem dieser möglichen Systeme rationale Zahlen vorkommen müssen, zu denen auch rationale Logarithmen gehören.

II. Setzt man in der Gleichung (12) des vorigen Paragraphen $x = \frac{m}{n}$, so ergiebt sich leicht

$$(2) \qquad tan\,\frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \ldots}}}}$$

Hier können ganz ähnliche Bemerkungen gemacht werden. Es mufs nämlich irgend eine Stelle kommen, von welcher abwärts alle Glieder des noch folgenden Kettenbruches ächte Brüche sind; auch tritt hier der Fall nicht ein, dafs von irgendwo an der Kettenbruch die Form

$$\cfrac{m^2}{m^2 + 1 - \cfrac{m^2}{m^2 + 1 - \ldots}}$$

haben könnte, weil die Nenner n, $3n$, $5n$, $7n$ u. s. f. ins Unendliche wachsen. Bezeichnen also m und n rationale Zahlen, so ist nach §. 77. der Gränzwerth des Kettenbruches rechts irrational und mithin ist es auch die linke Seite; d. h. die Tangente eines Bogens, welcher zum

Halbmesser in einem rationalen Verhältnisse steht, ist incommensurabel mit dem Halbmesser.

Hieraus folgt sehr leicht, daſs die Ludolph'sche Zahl π eine Irrationalzahl ist. Nach §. 82. Formel (12) ist nämlich für $x = \frac{\pi}{4}$

$$1 = \cfrac{\frac{\pi}{4}}{1 - \cfrac{\frac{\pi^2}{16}}{3 - \cfrac{\frac{\pi^2}{16}}{5 - \cfrac{\frac{\pi^2}{16}}{7 - \dots}}}}$$

Wäre nun $\frac{\pi}{4}$ gleich einem rationalen Bruche des Halbmessers, also $\frac{\pi}{4} = \frac{m}{n}$, so würde daraus folgen

$$1 = \cfrac{\frac{m}{n}}{1 - \cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{3 - \cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{5 - \cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{7 - \dots}}}} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \dots}}}}$$

Aber der Gränzwerth dieses Kettenbruches ist irrational und kann daher der rationalen Einheit nicht gleich sein. Daraus folgt, daſs die Voraussetzung $\frac{\pi}{4} = \frac{m}{n}$ falsch war und demnach $\frac{\pi}{4}$, mithin auch π selbst, zum Halbmesser incommensurabel ist.

Man kann auch noch zeigen, daſs π^2 irrational ist. Aus Formel (12) §. 82. folgt nämlich vermöge der Relation $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

$$x \cot x = 1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \dots}}}$$

oder

$$1 - x \cot x = \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \dots}}}$$

und hieraus für $x = \frac{\pi}{2}$

$$1 = \cfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{3 - \cfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{5 - \cfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{7 - \ldots}}}$$

Wäre nun $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ rational $= \frac{p}{q}$, so würde daraus folgen

$$1 = \cfrac{p}{3q - \cfrac{pq}{5q - \cfrac{pq}{7q - \ldots}}}$$

Der Gränzwerth dieses Kettenbruches ist aber irrational und kann nicht $= 1$ sein. Mithin ist auch $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ nicht rational, d. h. π^2 irrational.

Schlufsbetrachtung.

Überblicken wir noch einmal die Gesammtheit der entwickelten Resultate, indem wir wiederum den anfangs aufgestellten Unterschied zwischen unabhängigen und abhängigen veränderlichen Zahlen hinzubringen, so sind es hauptsächlich zwei Bemerkungen, die sich, als besonderer Aufmerksamkeit werth, hervorheben lassen.

I. Es war das Geschäft der Buchstabenrechnung, nachzuweisen, dafs das Zahlengebiet als ein in seiner Längenrichtung (von $-\infty$ bis $+\infty$) continuirlich fortgehendes betrachtet werden kann und dafs sich mit diesen Zahlen die sieben algebraischen Operationen ausführen lassen. Nur bei den imaginären Zahlen stöfst die Buchstabenrechnung auf eine nicht so unmittelbar zu beseitigende Schwierigkeit. Diesen Mangel ergänzt die algebraische Analysis, indem sie die eigentliche Bedeutung der imaginären oder besser complexen Zahlen hervorhebt (§. 50.) und die Regeln für die Rechnung mit denselben feststellt. Es zeigt sich, dafs das Zahlengebiet nicht aus einer, sondern aus zwei Dimensionen besteht, und es ist dieses Resultat um so bemerkenswerther, als damit eine eigenthümliche Verbindung zwischen den verschiedenen Formen der mathematischen Erkenntnifs hergestellt werden kann. Betrachten wir nämlich die Dinge

der Aufsenwelt von ihrer mathematischen Seite, so sind sie einer dreifachen Auffassungsweise fähig; wir denken uns dieselben entweder nach einander an verschiedenen Stellen der Zeit, oder schematisch geordnet, indem wir ihre Stellen durch Zahlen bezeichnen, oder endlich nebeneinander an verschiedenen Stellen des Raumes; das Eigenthümliche dabei ist, dafs die Zeit eine, das Zahlengebiet zwei und der Raum drei Dimensionen umfafst.

II. Für die abhängigen Variabelen, also für die Funktionen gelten zwei Bemerkungen, von denen sich eine auf den Inhalt der gestellten Aufgabe, die andere auf die Form bezieht, in der wir sie gelöst haben.

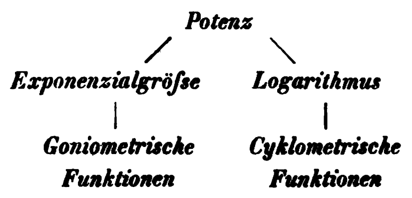
Die Aufgabe lautete: „eine Theorie der einfachen Funktionen

$$x^a,\ a^x,\ \log x;\ \sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x,\ \sec x,\ \mathrm{cosec}\, x;$$
$$\mathrm{Arcsin}\, x,\ \mathrm{Arccos}\, x,\ \mathrm{Arctan}\, x,\ \mathrm{Arccot}\, x,$$

zu liefern;" es war kein ursprünglich bekannter organischer Zusammenhang zwischen jenen Funktionen, der uns veranlafste, aus der unendlichen Menge möglicher Funktionen gerade die obigen herauszugreifen und einer spezielleren Betrachtung zu unterwerfen, es war nur die äufserliche Thatsache, dafs sie es sind, welche in der Elementarmathematik (Arithmetik wie Geometrie) einzig und allein vorkommen. Dagegen hat uns die nunmehr beendete Untersuchung gezeigt, wie nahe jene Funktionen einander verwandt sind, sie hat die Willkührlichkeit, welche in der Wahl des Thema's zu liegen schien, durch den Nachweis gerechtfertigt, dafs die genannten Funktionen eine nothwendig zusammengehörige Gruppe bilden, sie hat endlich die Mittel geliefert, um den Übergang von der einen Funktion zur anderen bewerkstelligen zu können. Gehen wir nämlich von der Potenz aus, so können wir von derselben ebensowohl die Exponenzialgröfse als den Logarithmus ableiten, und es bedarf hierzu nur der Formeln

$$\mathrm{Lim}\left\{(1+\delta z)^{\frac{1}{\delta}}\right\} = e^z, \qquad \mathrm{Lim}\,\frac{z^\delta - 1}{\delta} = lz$$

Mittelst der complexen Zahlen gelangt man von der Exponenzialgröfse zu den trigonometrischen Funktionen und andererseits von dem Logarithmus zu den cyklometrischen Funktionen, so dafs sich also der Zusammenhang zwischen den Funktionen der algebraischen Analysis in folgendem Schema darstellen läfst:

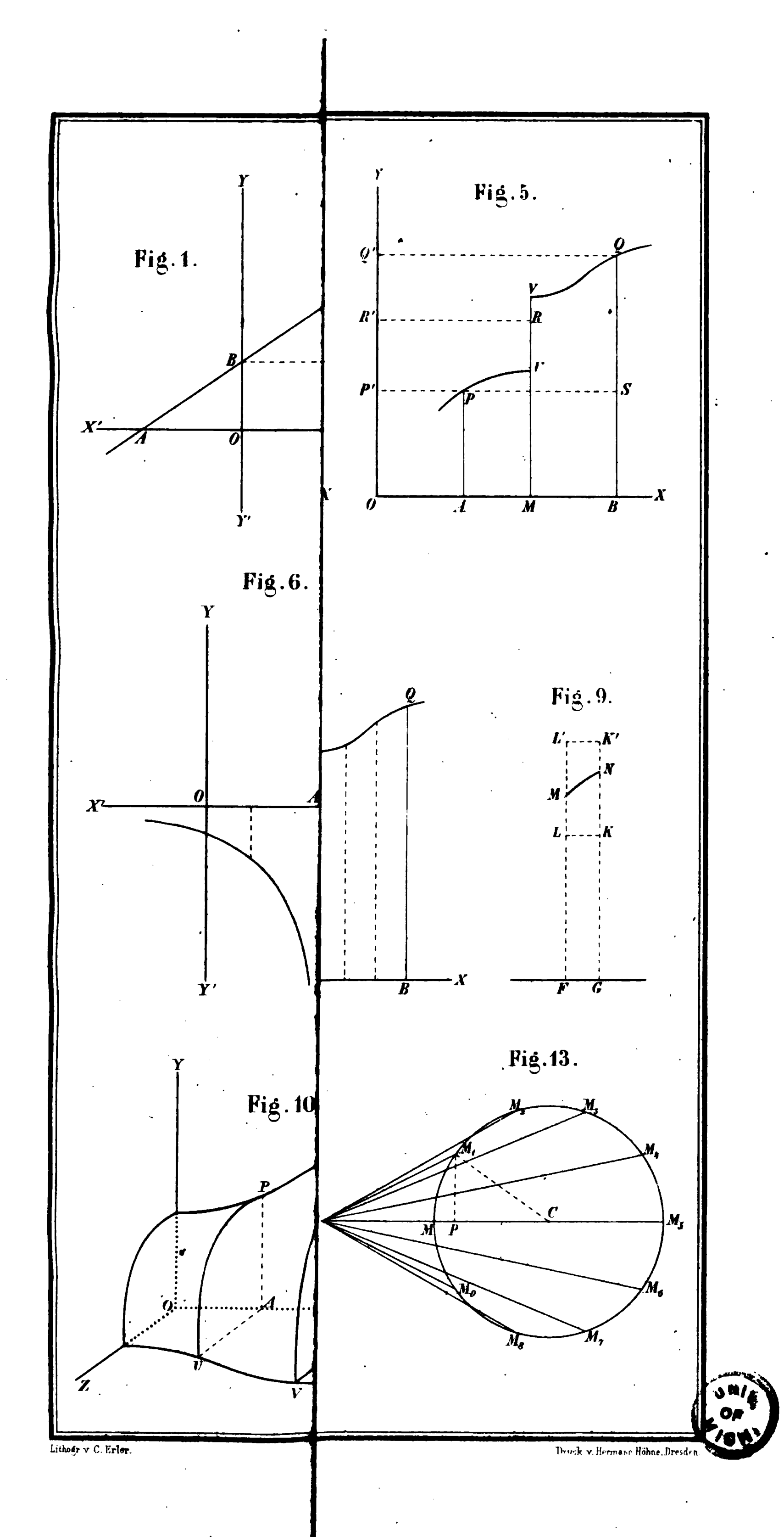


Die einander gegenüberstehenden Funktionen sind die Umkehrungen von einander; bei der Potenz fällt die Umkehrung mit ihr selbst zusammen, weil der Ausdruck x^n ebensowohl x^m als $\sqrt[m]{x}$ in sich enthält.

Was nun die Form anbelangt, unter der irgend eine der obigen Funktionen dargestellt werden kann, so ist dieselbe nach unseren Untersuchungen eine dreifache: die Reihe, das Produkt und der Kettenbruch. Diese Formen entsprechen den vier Spezies; die Reihe repräsentirt die Addition und Subtraktion, indem sie durch successive Additionen und, bei negativen Gliedern, durch successive Subtraktionen gebildet wird, das Produkt stellt die continuirliche Multiplikation und der Kettenbruch die fortgesetzte Division dar. Diese Formen, unter welchen die Funktionen hier erschienen, sind jedoch nicht die einzig möglichen, und es läfst sich im voraus absehen, dafs man sogleich zu neuen Formen gelangen mufs, wenn es glückt, den bisherigen Rechnungsoperationen neue zuzugesellen. Diese Andeutung möge genügen, sie weiter ausführen hiefse die Gränzen der niederen Analysis überschreiten.

Verbesserungen.

S. 22 Z. 18 v. u. lies : statt ;
- 33 - 14 v. o. lies No. 5 statt No. 4
- 49 - 7 v. o. ist hinter dem Worte „erleidet“ einzuschalten: „in den meisten Fällen“
- 218 fehlt in No. (7) der Faktor 2^{2n-1}.



Lithogr. v. C. Erler. Druck v. Hermann Höhne, Dresden.

